Serie 5

(Abgabe: 5. April 2011, 17 Uhr)

Aufgabe 5.1

Sei durch (ξ_i, ω_i), $i = 1, \ldots, n$, eine Quadraturformel $Q[f]$ mit $\omega_i > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass folgende Eigenschaften gelten:

(a) Linearität:

$$\begin{aligned} Q[f+g] &= Q[f] + Q[g]\,, \\ Q[cf] &= cQ[f]\,, \quad \forall c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(b) Positivität:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad Q[f] \geq 0\,.$$

Aufgabe 5.2 *

(a) Zeigen Sie, dass die 3/8-Regel mit Knoten $(0, 1/3, 2/3, 1)$ und Gewichten $(1/8, 3/8, 3/8, 1/8)$ Ordnung 4 hat.

(b) Approximieren Sie das Integral $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ mit der summierten 3/8-Regel mit äquidistanter Maschenweite $h = 0.5$. Vergleichen Sie anschliessend mit dem exakten Wert.

Aufgabe 5.3 (P)*

Schreiben Sie MATLAB-Routinen `function Int = Quad_SumMPunkt(f, a, b, h)` und `function Int = Quad_SumTrapez(f, a, b, h)`, die numerische Approximationen des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten Mittelpunktregel bzw. mit der summierten Trapezregel und Schrittweite h berechnen.

Schreiben Sie eine MATLAB-Routine `MeinTest`, welche die Programme `Quad_SumMPunkt` und `Quad_SumTrapez` testet. Berechnen Sie dazu die numerische Approximation des Integrals

$$\int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,dx = \pi$$

zuerst mit der summierten Mittelpunktregel und dann mit der summierten Trapezregel für $h_i = 2^{-i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 16$. Zeichnen Sie die absoluten Fehler und bestimmen Sie die Konvergenzordnungen.

Hinweis. Definieren Sie die Funktion `f` als ein `function handle`. (Beispiel: Die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ kann man in MATLAB mit dem Befehl `f = @(x) sin(x)./x` als `function handle` speichern.) Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Hinweis. Sei $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ein Vektor. Der `MATLAB`-Befehl `sum(y)` berechnet die Summe der Einträge, also $\sum_{i=1}^n y_i$. Damit kann man gewisse `for`-Schleifen in den Programmen vermeiden. Weiter kann man den Befehl `y(end)` benutzen, um auf das letzte Element des Vektors y zuzugreifen (dies ist eine Alternative zu `y(length(y))`).

Aufgabe 5.4 (A+B)

Betrachten Sie die Trapezregel

$$T[f] = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) \approx \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

Zeigen Sie: Für jedes $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ existiert ein $\xi_0 \in [0,1]$, so dass

$$\int_0^1 f(x)\,dx - T[f] = -\frac{1}{12} f''(\xi_0)\,.$$

Hinweis. Betrachten Sie $p(x) = f(0) + (f(1) - f(0))x$ das Interpolationspolynom vom Grad eins zu $f(x)$ und zeigen Sie, dass $T[f] = \int_0^1 p(x)\,dx$. Unter Verwendung von $f(x) - p(x) = \frac{1}{2}\omega_1(x) f''(\xi(x))$, wobei $\omega_1(x) = x(x-1)$ und $\xi : [0,1] \to [0,1]$, zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 f(x)\,dx - T[f] \geq -\frac{1}{12} f''(\xi_1)\,, \text{ sowie } \int_0^1 f(x)\,dx - T[f] \leq -\frac{1}{12} f''(\xi_2)\,,$$

wobei $f''(\xi_1) = \max_{\xi \in [0,1]} f''(\xi)$ und $f''(\xi_2) = \min_{\xi \in [0,1]} f''(\xi)$. Wenn in einem der Fälle Gleichheit eintritt, ist die Aussage mit $\xi_0 = \xi_1$ oder $\xi_0 = \xi_2$ gezeigt. Sonst nehmen Sie an, dass

$$\int_0^1 f(x)\,dx - T[f] > -\frac{1}{12} f''(\xi_1)\,, \text{ sowie } \int_0^1 f(x)\,dx - T[f] < -\frac{1}{12} f''(\xi_2)\,,$$

und verwenden Sie den Zwischenwertsatz.

Aufgabe 5.5 (A+B)

Auf dem reellen Vektorraum $V = \mathcal{C}([a,b])$ der stetigen Funktionen definieren wir

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) \omega(x)\,dx, \quad f, g \in V,$$

wobei $\omega(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$ eine fest gewählte Gewichtsfunktion ist. Zeigen Sie, dass $\langle f, g \rangle$ ein Skalarprodukt ist, d.h. für alle $f, g, h \in V$ und alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$,

(ii) $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$,

(iii) $\langle cf, g \rangle = c\langle f, g \rangle$,

(iv) $\langle f, f \rangle \geq 0, \quad \langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

Aufgabe 5.6 (A+B)*

Seien $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ Polynome mit $p_n \neq 0$ von Grad n, die auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ orthogonal bezüglich des Gewichtes ω sind, d.h. $\langle p_i, p_j \rangle = 0$, $i \neq j$ (s. Aufgabe 5).

(a) Zeigen Sie, dass $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ eine Basis von $\mathbb{P}_n([a,b])$, $n \geq 0$, bilden. Bestimmen Sie für ein allgemeines Polynom $q \in \mathbb{P}_n([a,b])$ die (Fourier-)Koeffizienten c_k in der Basisdarstellung $q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, p_k(x)$.

Hinweis. Um die lineare Unabhängigkeit von $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ zu beweisen, zeigen Sie, dass es keine nicht-triviale verschwindende Linarkombination von $p_0, p_1, \ldots, p_n$ gibt. Zeigen Sie, dass aus $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j p_j(x) = 0$, $\alpha_k = 0$ für $k = 1, \ldots, n$ folgt.

Mit $\langle q, p_k \rangle = \sum_{j=0}^{n} c_j \langle p_j, p_k \rangle$ berechnen Sie die Koeffizienten c_k von $q \in \mathbb{P}_n([a,b])$.

(b) Zeigen Sie, dass $\langle p_n, q \rangle = 0$, $\forall q \in \mathbb{P}_{n-1}([a,b])$, $n \geq 0$.

Hinweis. Schreiben Sie $q(x)$ in der Basisdarstellung wie bei (a) und beachten Sie, dass $c_n = 0$ gilt.

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`