Serie 6

(Abgabe: 12. April 2011, 17.00 Uhr)

Aufgabe 6.1

Bestimmen Sie die Ordnung der summierten Quadraturformel

$$Q_h[f] := \frac{4}{3}T_{h/2}[f] - \frac{1}{3}T_h[f]\,,$$

wobei $T_h[f]$ die summierte Trapezregel ist.

Aufgabe 6.2 *

Eine Quadraturformel für das Intervall $[-1,1]$ mit zwei Knoten hat folgende Form

$$Q[f] = \omega_1 f(\xi_1) + \omega_2 f(\xi_2) \approx \int_{-1}^{1} f(x)\,dx\,.$$

Bestimmen Sie die vier Parameter der Quadraturformel (also die Knoten ξ_1 und ξ_2, sowie die Gewichte ω_1 und ω_2) so, dass die Quadraturformel $Q[f]$ eine möglichst hohe Ordnung hat. Welche Ordnung kann erreicht werden?

Aufgabe 6.3 (P)

Schreiben Sie eine MATLAB-Routine `function Int = Quad_SumGauss4(f,a,b,h)` um die numerische Approximationen des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten Gauss-Quadraturformel $Q_h[f]$ vierter Ordnung und konstante Schrittweite h zu berechnen.

Schreiben Sie eine MATLAB-Routine `Test_SumGauss4` zur numerischen Berechnung der Integrale

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x\,dx \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

mit der summierten Gauss-Quadraturformel vierter Ordnung für $h_i = 2^{-i}$, und $i = 1,2,3,\ldots,10$. Zeichnen Sie den absoluten Fehler der Approximation von I_1 und bestimmen Sie die Konvergenzordnung. Schätzen Sie den Fehler der Approximation von I_2 mit $\left|Q_h[f] - Q_{h/2}[f]\right|$, zeichnen Sie den Fehler und verifizieren Sie, dass die Konvergenzordnung $3/2$ ist.

Warum wird hier nicht die optimale Konvergenzordnung erreicht?

Hinweis. Die summierte Gauss-Quadratur vierter Ordnung lautet

$$Q_h[f] = h\sum_{j=0}^{N-1}\left\{\omega_1 f\left(a + h\xi_1 + jh\right) + \omega_2 f\left(a + h\xi_2 + jh\right)\right\}\,, \quad N = \frac{b-a}{h},$$

wobei

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}, \xi_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \xi_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\,.$$

Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 6.4 (A+B)*

Zeigen Sie, dass eine symmetrische Quadraturformel, gegeben durch die (ω_i, ξ_i), mit $i = 1, \ldots, n$, immer Ordnung p mit p gerade hat.

Hinweis. Nehmen Sie an, dass die Quadraturformel Polynome $q \in \mathbb{P}_{2k}$, $k \geq 0$, exakt integriert und zeigen Sie, dass die Quadraturformel auch Polynome vom Grad $2k+1$ exakt integriert. Dazu begründen Sie, dass es zu zeigen reicht, dass eine Basis von $\mathbb{P}_{2k+1}$ exakt integriert wird.

Betrachten Sie nicht die Standardbasis $\{1, x, \ldots, x^{2k}, x^{2k+1}\}$, sondern ersetzen Sie das letzte Basiselement mit $(x - 0.5)^{2k+1}$. (Weshalb ist dies eine Basis?)

Um zu zeigen, dass das letzte Basiselement exakt integriert wird verwenden Sie die Symmetrieeigenschaften.

Aufgabe 6.5 (A+B)*

Für die Gauss-Quadratur $Q_n[f]$ mit Knoten ξ_i und Gewichten ω_i, $i = 1, \ldots, n$, zeigen Sie, dass $\omega_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Hinweis. Wenden Sie die Gauss-Quadratur auf $L_i^2(x)$ an, wobei $L_i(x)$ das i-te Lagrange-Polynom ist. Es gilt also $L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$.

Aufgabe 6.6 (A+B)

Betrachten Sie die Tschebyscheff-Polynome

$$T_n(x) = \cos(n\varphi) \quad x = \cos(\varphi)\,,\ x \in [-1, 1]\,,\ n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Zeigen Sie, dass die Polynome $T_n(x)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ bezüglich der Gewichtsfunktion

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ein System von orthogonalen Polynomen bilden.

Hinweis. Zeigen Sie zuerst, dass $\int_{-1}^{1} T_k(x) T_j(x) \omega(x)\, dx = \int_0^\pi \cos(k\varphi)\, \cos(j\varphi)\, d\varphi$. Berechnen Sie dann, dass

$$\int_0^\pi \cos(k\varphi)\, \cos(j\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq j\,, \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } k = j > 0\,, \\ \pi & \text{falls } k = j = 0\,. \end{cases}$$

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`