

Serie 7

(Abgabe: 19. April 2011, 17.00 Uhr)

Aufgabe 7.1 *

Berechnen Sie von Hand die LU-Zerlegung (ohne Pivotsuche) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ -6 & -2 & -12 \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie die LU-Zerlegung zur Berechnung der Lösung der beiden linearen Gleichungssysteme $Ax = b^{(i)}$, $i = 1, 2$, mit $b^{(1)} = (-1, 5, -2)^T$, $b^{(2)} = (4, 7, -14)^T$.

Aufgabe 7.2

Sei $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine untere Dreiecksmatrix, deren sämtliche Diagonaleinträge gleich eins sind. Bestimmen Sie L^{-1} .

Hinweis. Überlegen Sie, dass $L^{-1} = (y^{(1)} | y^{(2)} | \dots | y^{(n)})$, wobei $y^{(i)}$ die Lösung des Systems $Ly^{(i)} = e^{(i)}$. Hier bezeichnet $e^{(i)}$ den i -ten kanonischen Einheitsvektor. Um das System $Ly^{(i)} = e^{(i)}$ zu lösen verwenden Sie die Vorwärtssubstitution.

Aufgabe 7.3 – Zusatzaufgabe

Sei \mathcal{L}^n die Menge der unteren $n \times n$ -Dreiecksmatrizen mit lauter Einsen auf der Diagonalen. Zeigen Sie, dass \mathcal{L}^n bezüglich der gewöhnlichen Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

Aufgabe 7.4

Seien $L_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k = 1, \dots, n-1$ untere Dreiecksmatrizen der Form

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie L_k^{-1} .

Hinweis. Verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 7.7 (A+B)*

Sei A eine reguläre $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie, dass die LU-Zerlegung $A = LU$ eindeutig ist.

Hinweis. Nehmen Sie an, dass zwei LU-Zerlegungen $LU = A = L'U'$ existieren. Zeigen Sie, dass $L^{-1}L' = UU'^{-1}$. Aufgrund der Struktur der Matrizen $L'^{-1}L$ und $U'U^{-1}$ schliessen Sie auf $L^{-1}L' = UU'^{-1} = I$.