Serie 8

(Abgabe: 3. Mai 2011, 17.00 Uhr)

Aufgabe 8.1 *

Seien

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 8 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie von Hand die LU-Zerlegung (mit Spaltenpivotsuche) $PA = LU$ von A, und lösen Sie damit das Gleichungssystem $Ax = b$.

Hinweis. Mit den Matlab-Befehlen `[L,U,P] = lu(A)` und `x = A\b` können Sie Ihre Lösung verifizieren.

Aufgabe 8.2

Sei $L_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine untere Dreiecksmatrix der Form

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei p eine Permutation, die nur Zahlen aus $\{k+1, \ldots, n\}$ permutiert, und P die zugehörige Permutationsmatrix. Zeigen Sie, dass

$$PL_kP^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{p(k+1),k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{p(n),k} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Schreiben Sie L_k als Summe

$$L_k = I + \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & 0 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8.3 (P)(A+B)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `function L = CholeskyDecomp(A)`, die sich für symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wie folgt verhält:

Ist A positiv definit (vergleiche Aufgabe 8.4 (c)), so berechnet man den Cholesky-Faktor L. Anderfalls liefert sie eine Fehlermeldung.

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `Test_CholeskyDecomp` zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & & & x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & & & 2x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -5 \end{array}$$

mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung.

Hinweis. Zur Berechnung der Eigenwerte von A verwenden Sie den `MATLAB`-Befehl `eig`. Zur Lösung des Systems $Ax = b$ mit $A = LL^T$ verwenden Sie die `MATLAB`-Routinen `Lsolve` und `Usolve` (siehe Aufgabe 7.5).

Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 8.4 (A+B)

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit (d.h. $x^T Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$). Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) A ist regulär.

Hinweis. Nehmen Sie an, dass A nicht regulär ist. Dann gibt es einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x \neq 0$ und $Ax = 0$.

(b) $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Hinweis. Betrachten Sie den i-ten kanonischen Einheitsvektor $e_i \in \mathbb{R}^n$.

(c) Alle Eigenwerte von A sind reell und strikt positiv.

Hinweis. Sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie v als $v = v_1 + iv_2$ mit $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie $v^H Av$ und $v^H v$.

Hinweis. Für beliebige $(m \times n)$-Matrizen $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ definiert man die Matrix A^H durch

$$\left(A^H\right)_{ij} = \overline{a_{ji}},$$

wobei $\overline{a_{ji}}$ die komplex konjugierte Zahl von a_{ji} ist.

Aufgabe 8.5 (A+B)*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass eine eindeutige untere Dreiecksmatrix $L = (\ell_{ij})_{i,j=1}^n$ existiert mit $\ell_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$, und $A = LL^T$.

Hinweis. Verwenden Sie Satz IV.14 des Skripts und verteilen Sie die Diagonalmatrix D „gerecht“ auf.

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`