Serie 9

(Abgabe: 10. Mai 2011, 17.00 Uhr)

Aufgabe 9.1 *

Nach verschiedenen Autofahrten zwischen den Städten Basel, Bern, Luzern und Zürich werden mit Hilfe des Kilometerzählers die Distanzen der zurückgelegten Strecken (in Kilometern) geschätzt.

Basel – Bern	Basel – Luzern	Basel – Zürich	Bern – Luzern	Bern – Zürich
96	110	108	110	122

Jede Fahrt verlief über das Autobahnkreuz Egerkingen/Härkingen. Bestimmen Sie im Sinne der kleinsten Fehelrquadrate die Längen der Strecken von jeder Stadt bis zum Autobahnkreuz.

Aufgabe 9.2

Durch die Messpunkte

t_i	$1/\mathrm{e}$	1	e
y_i	-1	e	$2+\mathrm{e}^2$

soll eine Ausgleichsfunktion der Form

$$y(t) = \alpha t + \beta \log(t)$$

gelegt werden.

(a) Geben Sie das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung von α und β an.

(b) Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Methode der Normalengleichungen.

(c) Geben Sie die Norm des Defektes $\|Ax^* - b\|_2$ für die Lösung des Ausgleichsproblems x^* an.

Aufgabe 9.3 (P)*

Der Anhalteweg a eines Velos wird üblicherweise als die Summe aus Reaktionsweg r und Bremsweg b definiert. Man modelliert

$$a = r + b = t_s v + \frac{v^2}{2\mu g}\,,$$

wobei v die Geschwindigkeit ist, t_s die Schreckzeit, $\mu \leq 1$ der Gleitreibungskoeffizient und $g \approx 9.8\, m/s^2$ die Gravitationskonstante. Zur Bestimmung von t_s und μ wurden gemessen:

v in km/h	15	20	25	30	35	40	45	50
a in m	3	6	8	10	14	18	22	25

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `anhalteweg` zur Lösung des Ausgleichsproblems für die Parameter t_s und $1/\mu$ unter Verwendung der Normalengleichungen. Zeichnen Sie die den berechneten funktionalen Zusammenhang des Anhalteweges in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit mit den Messwerten zusammen.

Hinweis. Passen Sie zuerst die Masseinheiten ein.

Aufgabe 9.4 (P)(A+B)

Zu den Zeiten t_i, $i = 1, \dots, 10$, werden für die physikalische Grösse $f(t)$ die Messwerte f_i beobachtet:

t_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f_i	100	34	17	12	9	6	5	4	4	2

Setzen Sie die unbekannte Funktion f als Linearkombination $f(t) = \sum_{k=1}^{4} \gamma_k \phi_k(t)$ der bekannten Funktionen $\phi_j(t)$, $j = 1, \dots, 4$ an, wobei

$$\phi_1(t) = \frac{1}{t}, \quad \phi_2(t) = \frac{1}{t^2}, \quad \phi_3(t) = \mathrm{e}^{-(t-1)}, \quad \phi_4(t) = \mathrm{e}^{-2(t-1)}.$$

Die Koeffizienten γ_k sollen so bestimmt werden, dass $\sum_{i=1}^{10} (f(t_i) - f_i)^2$ minimal wird.

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `Ausgleichsprob_LinKomb` zur Lösung der Aufgabe mit Hilfe der Normalgleichungen, sowie mit Hilfe der QR-Zerlegung der Fehlergleichungsmatrix A. Ermitteln Sie, ab welcher Dezimalstelle sich die Koeffizienten γ_j der beiden Lösungen unterscheiden. Bestimmen Sie die Konditionszahl der Fehlergleichungsmatrix A und der Matrix $A^T A$.

Hinweis. Zur Berechnung der QR-Zerlegung der Fehlergleichungsmatrix A verwenden Sie den `MATLAB`-Befehl `[Q, R] = qr(A)`. Zur Bestimmung der Konditionszahl einer Matrix verwenden Sie den `MATLAB`-Befehl `cond`. Der Befehl `format long` bewirkt, dass alle Dezimalstellen angezeigt werden.

Ein Skelett des Codes `Ausgleichsprob_LinKomb.m` kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 9.5 (A+B)

Nehmen Sie an, dass die Variablen $x = (x_1, x_2)^T$ durch ein physikalisches Experiment bestimmt werden. Statt der exakten Lösung von $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 10^{-8} \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

erhält man wegen Messfehlern die Resultate von $\bar{A}\bar{x} = \bar{b}$, mit

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3(1+\varepsilon_1) & 0 \\ 0 & 10^{-8}(1+\varepsilon_2) \end{pmatrix} \text{ und } \bar{b} = \begin{pmatrix} 2(1+\eta_1) \\ 3(1+\eta_2) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Problem gut konditioniert ist.

(b) Seien nun $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 3 \cdot 10^{-9}$ und $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Betrachten Sie die Abschätzung (Satz IV.22)

$$\frac{\|\bar{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \varepsilon_A \kappa(A)} (\varepsilon_A + \varepsilon_b).$$

Dabei bezeichne $\|\cdot\|$ die Maximumsnorm, $\kappa(A)$ die Konditionszahl von A und ε_A und ε_B seien so gewählt, dass $\left\|A - \bar{A}\right\| \leq \varepsilon_A \|A\|$ und $\left\|b - \bar{b}\right\| \leq \varepsilon_b \|b\|$. Gilt die obige Abschätzung? Falls ja um welchen Faktor wird der Fehler überschätzt?

Aufgabe 9.6 (A+B)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, vom Rang n und

$$A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine QR-Zerlegung von A, wobei $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit $r_{ii} > 0$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $A^T A$ symmetrisch und positiv definit ist.
Hinweis. Um die Symmetrie zu zeigen, zeigen Sie, dass $(A^T A)^T = A^T A$. Um die positive Definitheit zu zeigen betrachten Sie $x^T A^T A x$ für $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Zeigen Sie, dass R^T der Cholesky-Faktor von $A^T A$ ist.
Hinweis. Überlegen Sie zuerst, dass eine eindeutige untere Dreiecksmatrix L mit $\ell_{ii} > 0, i = 1, \ldots, n$ und $A^T A = LL^T$ existiert. Dann zeigen Sie, dass $R^T \left(R^T\right)^T = A^T A$. Wegen der Eindeutigkeit des Cholesky-Faktors folgt die Behauptung.

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`