Serie 10

(Abgabe: 17. Mai 2011, 17.00 Uhr)

Aufgabe 10.1 *

Zur Bestimmung von $\sqrt{7}$ wird die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 7$ berechnet. Wir untersuchen die Fixpunktiterationen $x_{k+1} := \Phi_i(x_k)$, $i = 1, \ldots, 4$ mit

$$\Phi_1(x) = 7 + x - x^2\,, \quad \Phi_2(x) = \frac{7}{x}\,, \quad \Phi_3(x) = 1 + x - \frac{1}{7}x^2\,, \quad \Phi_4(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Phi_i(x^*) = x^* \quad \Longleftrightarrow \quad (x^*)^2 - 7 = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, 4.$$

(b) Berechnen Sie jeweils $x_1, \ldots, x_4$ mit dem Startwert $x_0 = 3$.

(c) Zeigen Sie, dass $|\Phi_i'(x^*)| \geq 1$ für $i = 1, 2$ und $|\Phi_i'(x^*)| < 1$ für $i = 3, 4$.

(d) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration mit Φ_3 lokal linear konvergiert und die mit Φ_4 lokal quadratisch konvergiert.

Hinweis. Überlegen Sie, dass Φ_3 und Φ_4 lokal Kontraktionen sind (Korollar VI.5). Was können Sie somit über die Konvergenz schliessen? Um die lineare, bzw. quadratische Konvergenz zu erhalten benutzen Sie die Identität

$$|x^* - x_n| = |\Phi_i(x^*) - \Phi_i(x_{n-1})|\,, \qquad i = 3, 4$$

und entwickeln Sie $\Phi_i(x_{n-1})$ um den Punkt x^* (Taylor).

Aufgabe 10.2

Wir betrachten die Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = \Phi(x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

mit einer Kontraktion Φ, d.h. $|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|$ mit $L < 1$. In der Praxis sucht man eine Approximation x_n so, dass

$$|x_n - x^*| \leq Tol,$$

mit einer gegebenen Toleranz Tol.

Mit Hilfe von der geometrischen Reihe, zeigen Sie zuerst, dass

$$|x_n - x^*| \leq {}^{L}\!/_{(1-L)}\, |x_n - x_{n-1}|\,.$$

Finden Sie nun ein Kriterium um die Iteration zu stoppen. Verwenden Sie dazu

$$L_n := \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1} - x_{n-2}|}$$

als Schätzung für L.

Aufgabe 10.3 (P)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion

```
function z = NewtonIter(f, x0, tol, max_iter),
```

die mit dem Newton-Verfahren eine Nullstelle z einer reellwertigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ näherungsweise bestimmt. Der Abbruch der Iteration erfolgt entweder, wenn $|x_{k+1} - x_k| <$ `tol` ist, oder die maximale Anzahl Iterationen `max_iter` erreicht wurde. Die Ableitung $f'(x)$ soll durch den Differenzenquotienten

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad h = 10^{-8},$$

ersetzt werden.

Schreiben Sie eine Matlab-Routine `Test_NewtonIter`, die auf neun Stellen Genauigkeit alle reellen Wurzeln des Polynoms $p(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x - 7$, sowie die drei kleinsten positiven Nullstellen der Funktion

$$f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{25}} \cos(x)$$

berechnet.

Hinweis. Zeichnen Sie vorher die Funktionen $p(x)$ und $f(x)$, um geeignete Startwerte zu finden. Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 10.4 (A+B)

Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle von

$$f(x) = |x|^{\frac{3}{7}}$$

für keinen Anfangswert $x_0 \neq 0$ konvergiert. Ist dies ein Widerspruch zum Konvergenzsatz aus der Vorlesung?

Hinweis. Berechnen Sie x_{n+1} mit dem Newton-Verfahren aus x_n und zeigen Sie, dass die so entstehende Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ für kein $x_0 \neq 0$ konvergiert. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $x_n > 0$ und $x_n < 0$.

Aufgabe 10.5 (A+B)*

Sei $\Phi : [a, b] \to [a, b]$ eine Kontraktion, d. h.

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]\,,$$

für ein $L < 1$, und sei $x^* \in [a, b]$ der Fixpunkt der Iteration $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, mit $x_0 \in [a, b]$. Zeigen Sie die folgenden Fehlerabschätzungen

$$|x^* - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L}\,|x_1 - x_0| \qquad \text{(a priori)}\,,$$

$$|x^* - x_n| \leq \frac{L}{1-L}\,|x_n - x_{n-1}| \qquad \text{(a posteriori)}\,.$$

Hinweis. Zeigen Sie zuerst, dass für $x, y \in [a, b]$ die Ungleichung

$$|x - y| \leq \frac{1}{1 - L}(|x - \Phi(x)| + |y - \Phi(y)|).$$

Addieren Sie dazu zu $x - y$ die zwei „schlaue Nullen" $-\Phi(x) + \Phi(x)$ und $-\Phi(y) + \Phi(y)$ und wenden Sie die Dreiecksungleichung an. Aus dieser Ungleichung folgt mit geschickter Wahl von x und y die a-posteriori-Fehlerabschätzung. Für die a-priori-Fehlerschätzung zeigen Sie zusätzlich, dass $|x_n - x_{n-1}| \leq L^{n-1} |x_1 - x_0|$. Alternativ können Sie auch mittels Teleskopsummen und geometrischen Reihen argumentieren.

Aufgabe 10.6 (A+B)

Gesucht ist die Lösung der Fixpunktgleichung $x = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, mit

$$\Phi(x) = {}^1\!/_2 \sin(x) + 2.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Intervall $\Omega = [0, 3]$ durch Φ in sich abgebildet wird.

(b) Zeigen Sie, dass Φ auf Ω kontrahierend ist. Folgern Sie daraus, dass es einen eindeutigen Fixpunkt x^* von Φ in Ω gibt.

(c) Schätzen Sie mit Hilfe der a-priori-Fehlerabschätzung ab, wie viele Schritte Sie machen müssen um mit der Fixpunktiteration mit Startwert $x_0 = 2$ eine Näherung von x^* zu erhalten, die auf 10^{-5} genau ist. Berechnen Sie dazu x_1.

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`