Serie 11

(Abgabe: 24. Mai 2011 - Zusatzblatt)

Aufgabe 11.1 (P)*

Schreiben Sie eine `Matlab`-Funktion

```
function [x,iter] = NewtonIter_System(f1,f2,f3,x0,max_iter,tol)
```

die eine numerische Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3) &= 0,\\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= 0,\\ f_3(x_1,x_2,x_3) &= 0, \end{aligned}$$

mit der Newton-Iteration für den Startwert $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T$ und der Genauigkeit `tol` bestimmt, wobei höchstens `max_iter` Iterationsschritte durchgeführt werden. Approximieren Sie die partiellen Ableitungen von $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ in der Jacobi-Matrix durch Differenzenquotienten, z. B.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) \approx \frac{f_1(x_1,x_2+h,x_3) - f_1(x_1,x_2,x_3)}{h}, \quad h = 10^{-8}.$$

Schreiben Sie eine `Matlab`-Routine `Test_NewtonIter_System`, die die numerische Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \sinh(x_1x_2) + x_1^2 + x_2^2 + x_2 &= 1,\\ x_1^3 - x_2^2 + x_2 &= -1,\\ x_1^2 - x_3^2 &= 0, \end{aligned}$$

mit $x^{(0)} = (-1, 1, -1)$ und `tol`$= 10^{-12}$ berechnet.

Hinweis. Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 11.2 (P)*

Schreiben Sie zwei `Matlab`-Funktionen

`function [x,y] = Euler(f,y0,h,x_0,x_max)` und
`function [x,y] = ModEuler(f,y0,h,x_0,x_max)`,

die eine numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x,y)\,, \qquad x_0 \le x \le x_{max}\\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

mit dem Euler-Verfahren, resp. dem modifizierten Euler-Verfahren, mit konstanter Schrittweite h bestimmen.

Schreiben Sie eine `Matlab`-Routine `Test_Euler` zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{x+2}{x+1} y\,, \qquad 0 \le x \le 5$$
$$y(x_0) = \mathrm{e}$$

mit dem Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite $h = 0.01$. Zeichnen Sie die numerische Lösung des Euler-Verfahrens, des mdoifizierten Euler-Verfahrens und die exakte Lösung $y(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{(1+x)}$ zusammen.

Hinweis. Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 11.3 (P)*

Schreiben Sie eine `Matlab`-Funktion

```
function [x,y1,y2] = Euler_System(f1,f2,y0,h,x_0,x_max)
```

zur numerischen Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2)\,, \quad x_0 \le x \le x_{max}$$
$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2)\,, \quad x_0 \le x \le x_{max}$$
$$y_1(x_0) = y_1^0\,,$$
$$y_2(x_0) = y_2^0$$

mit dem Euler-Verfahren.

Schreiben Sie eine `Matlab`-Routinen `Test_Euler_System` zur numerischen Lösung einer gedämpften harmonischen Schwingung

$$y'' + \lambda y' + y = 0\,, \quad 0 \le x \le 5$$
$$y(0) = 0,$$
$$y'(0) = 1\,.$$

Berechnen Sie die numerische Lösung für $\lambda = 0$ mit Schrittweite $h = 0.025$ und $h = 0.0025$ und plotten Sie die Approximationen von y und y' zusammen mit der exakten Lösung.

Für $\lambda = 1$ berechnen Sie die Lösung mit Schrittweite $h = 0.0025$ und plotten Sie wieder beide Komponenten.

Hinweis. Setzen Sie $y_1 := y$ und $y_2 := y'$ und schreiben Sie zuerst die Differentialgleichung zweiter Ordnung als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um. Benutzen Sie das Verfahren für dieses System.

Für $\lambda = 0$ lautet die exakte Lösung $(y_1, y_2)^T = (\sin x, \cos x)^T$.

Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 11.4 (A+B)

Beweisen Sie die folgende Aussage (Banachscher Fixpunktsatz in $\mathbb{R}^n$):

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes, beschränktes Gebiet und $\Phi\colon \Omega \to \Omega$ eine Kontraktion. Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt $x^* \in \Omega$ mit $x^* = \Phi(x^*)$. Zudem konvergiert die Folge $x^{(n+1)} = \Phi(x^{(n)})$, $n = 0, 1, \dots$ für jedes $x^{(0)} \in \Omega$ gegen x^*.

Hinweis. Um die Existenz eines Fixpunktes $x^* \in \Omega$ von Φ zu zeigen, zeigen Sie, dass $\{x^{(n)}\}_{n \geq 0}$ eine Cauchy-Folge ist. Dazu zeigen Sie, dass

$$\left\| x^{(m)} - x^{(n)} \right\| \leq \frac{L^n}{1-L} \left\| x_1 - x_0 \right\| .$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, betrachten Sie einen weiteren Fixpunkt $x' \in \Omega$ von Φ. Zeigen Sie dann, dass $\|x^* - x'\| = 0$.

Aufgabe 11.5 (A+B)

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $x^* \in \Omega$ ein Fixpunkt von Φ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, in deren induzierten Matrixnorm $\|\Phi'(x^*)\| < 1$ gilt. Dann gibt es eine (kompakte) Umgebung

$$B_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| \leq \varepsilon\},$$

so dass $\Phi\colon B_\varepsilon(x^*) \to B_\varepsilon(x^*)$ eine Kontraktion ist, die $B_\varepsilon(x^*)$ in sich abbildet.

Hinweis. Überlegen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\|\Phi'(x)\| < 1$, $x \in B_\varepsilon(x^*)$. Mit der Bezeichnung $I(x,y) = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$ und unter Verwendung von

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \left\| \int_0^1 \Phi'(tx + (1-t)y)\, dt\, (x-y) \right\| \leq \max_{\xi \in I(x,y)} \|\Phi'(\xi)\| \cdot \|x - y\|$$

für $x, y \in B_\varepsilon(x^*)$, zeigen Sie, dass $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|$ mit $L < 1$.

Um zu zeigen, dass $B_\varepsilon(x^*)$ in sich abgebildet wird, nehmen Sie ein $x \in B_\varepsilon(x^*)$ und zeigen Sie, dass $\|\Phi(x) - x^*\| \leq \varepsilon$.

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`