Serie 1

1.

Sei die Funktion $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^a}$$

für $(x_1, x_2, x_3) \neq 0$ und mit einem Parameter $a > 0$. Berechnen Sie

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \ \nabla u, \ \text{ und } \ \Delta u.$$

2.

Sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$v(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 + x_3^2, \mathrm{e}^{-x_1} \sin(x_2 + 2x_3), (x_1 + 1)/x_2).$$

Berechnen Sie den Gradient ∇v und die Divergenz $\mathrm{div} v$.

3.

(a) Sind die folgenden Gleichungen linear, nicht linear, homogen, inhomogen ? Für jede Gleichungen, geben Sie die Ordnung.

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} - 1 &= 0 \\
u_t - 2u_{xx} + xu &= 0 \\
-\mathrm{i}u_t - u_{xx} + \frac{u}{x} &= 0 \\
u_{xx} + u_{yy} &= 23 \\
u_{tt} - 3u_{xx} &= 0 \\
\cos^2(u_x) + \sin^2(u_x) &= u_x \\
\cos(xy^2)u_x - y^3 u_y &= \tan(x^2 + y^2) \\
u_t + a(x,t)u_x &= b(x,t)
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass für eine lineare Gleichung $\mathcal{L}u = 0$, falls $u_1, \ldots, u_n$ Lösungen sind so ist $c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n$ (mit c_j Konstanten) auch eine Lösung.

4.

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
u_{xx}(x) &= 0 \\
u_{xy}(x,y) &= 0 \\
u_{xx}(x,y) + u(x,y) &= 0 \\
u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t)
\end{aligned}$$

Hinweis: *Für die letzte Gleichung verwenden Sie die Trennung der Variablen.*

5.

Für die (eindimensionale) Schrödinger-Gleichung

$$-\mathrm{i}\hbar u_t = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + \frac{e^2}{r}u$$

zeigen Sie, dass $\int |u(x,t)|^2 \mathrm{d}x = 1$ für alle Zeit $t > 0$, falls $\int |u(x,0)|^2 \mathrm{d}x = 1$.

Hinweis: *Nehmen Sie an, dass* $\hbar = e = m = 1$, $u(x,t)$ *ist eine komplexe Funktion.*