Serie 10

1.

Schreiben Sie eine FEM-Code für das Problem

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' &= f(x) \quad \text{in } \Omega = (0,1) \\ \qquad u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit $p(x) \geq 0, p \in \mathcal{C}^1(0,1)$ und $f \in L^2(0,1)$. Testen Sie mit $p(x) = \sin(\pi x)$ und $f(x) = -\pi^2(-1 + 2(\cos(\pi x))^2)$.

2.

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -u''(x) &= f(x) \qquad \text{in } \Omega = (0,1) \\ \quad u(0) &= 2,\ u'(1) = 1. \end{cases}$$

Finden Sie die schwache Formulierung und bauen Sie das lineare Gleichungssystem mit FEM für die drei lineare Elemente, die das Rechengebiet $\bar{\Omega}$ überdeckt.

3.

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -u''(x) &= 9\pi^2 \cos(3\pi x)(-7 + 9\cos(3\pi x)^2) \quad \text{in } \Omega = (0,1) \\ \quad u(0) &= u(1) = 0. \end{cases}$$

Schreiben Sie eine FEM-Code für lineare bzw. quadratische Elemente.

4.

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= f(x) \qquad \text{in } \Omega = (0,1) \\ \qquad\qquad u(0) &= u(1) = 0 \end{cases}$$

mit $p(x) \geq c > 0$, $q(x) \geq 0$, $p \in \mathcal{C}^1(0,1)$, $q \in \mathcal{C}(0,1)$, $f \in \mathcal{C}^2(0,1)$ und $u \in H^2(0,1)$.

a) Zeigen Sie für die FE-Approximation u_h mit $h = 1/N$ gelten

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq C_1 h \|u''\|_{L^2(0,1)} \tag{1}$$

$$\text{und } \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq C_2 h \|f\|_{L^2(0,1)}. \tag{2}$$

b) Berechnen Sie die rechte Seite von (2) für $p \equiv 1, q \equiv 0$, $f \equiv 1$ und $h = 10^{-3}$.