Serie 11

1.

Zeigen Sie dass, das Problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) &= f(x,t) \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T],\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung hat.

2.

Wir betrachten die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) &= f(x,t) \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T],\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Finden Sie die schwache Formulierung und bauen Sie damit das lineare Gleichungssystem auf.

3.

Wir betrachten die Diffusion-Advektion-Gleichung:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) + q\nabla u(x,t) &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T],\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Finden Sie die schwache Formulierung.

4.

Die *Stokes-Gleichung* beschreibt die Bewegung einer *inkompressiblen* zähen Flüssigkeit in einem 2- oder 3-dimensionalen Körper. Unter der *Inkompressibilität* versteht man das divergenzfreie Geschwindigkeitsfeld. Hier betrachten wir die zeitabhängige Stokes-Gleichung in 2 D:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \Delta \underline{u} + \underline{\operatorname{grad}}\, p &= \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T],\ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{div} \underline{u} &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T], \\ \underline{u}\big|_{t=0} &= \underline{u_0} \quad \text{in} \quad x \in \Omega, \\ \underline{u} &= \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

wobei $\underline{u}$ das gesuchte Geschwindigkeitsfeld und p der gesuchte Druck ist. Finden Sie zwei schwache Formulierungen für diese Gleichung.

5.

Wir betrachten das Problem aus der Aufgabe 6 in der Serie 2.

a) Implementieren Sie das Problem durch FEM mit der expliziten Euler-Methode.
b) Implementieren Sie das Problem durch FEM mit der impliziten Euler-Methode.