

Serie 12

In dieser Serie betrachten wir als ein Modellproblem die Wellengleichung

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} && \text{in } \Omega \times T := (0, \pi) \times (0, T] \\u(x, 0) &= 2 \sin(x) && \text{in } \Omega \\u_t(x, 0) &= 0 && \text{in } \Omega \\u(x, t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times T.\end{aligned}$$

1.

Finden Sie die schwache Form des Modellproblems und bauen Sie das lineare Differentialgleichungssystem mit der linearen FEM, das die zweite Ableitung von dem Lösungsvektor enthält.

2.

a) Formulieren Sie das lineare Differentialgleichungssystem in der ersten Order aus der Aufgabe 1 mit der Anwendung von der expliziten Euler-Methode bzw. der Crank-Nicolson-Methode.

b) Finden Sie die CFL-Bedingung für das Modellproblem.

c) Implementieren Sie hiermit das Modellproblem mit der linearen und quadratischen FEM.

3.

Implementieren Sie das Modellproblem aus dem linearen Differentialgleichungssystem in der zweiten Order mit der Leap-Frog-Methode:

$$\ddot{y} = f(y) \longrightarrow y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \Delta t^2 f(y_n).$$

4.

Implementieren Sie das obige Problem mit dem Newmark-Algorithmus:
wir lösen das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{S}\mathbf{u} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0, \\ \dot{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{u}}_0.\end{aligned}$$

I. Initialisierung

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \\ \mathbf{d} &= \mathbf{u}(x, 0), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{u}_t(x, 0), \\ \mathbf{a} &= \mathbf{u}_{tt}(x, 0).\end{aligned}$$

II. Prediktor

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{d}} &= d + \Delta t \mathbf{v} + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \mathbf{a}, \\ \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{v} + \Delta t (1 - \gamma) \mathbf{a}.\end{aligned}$$

III. Lösung für \mathbf{a}

$$(\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{S}) \mathbf{a} = -\mathbf{S} \tilde{\mathbf{d}}.$$

III. Korrektur

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \tilde{\mathbf{d}} + \Delta t^2 \beta \mathbf{a}, \\ \mathbf{v} &= \tilde{\mathbf{v}} + \Delta t \gamma \mathbf{a}.\end{aligned}$$