Serie 2

1.

Prüfen Sie, ob die d'Alembert Lösung gleich der Fourier Lösung für die folgenden Gleichungen ist:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \\ u(x,0) &= f(x),\ u_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

2.

Berechnen Sie die Koeffizienten c_n von der Sinus-Fourierreihe von

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{\ell}).$$

3.

Lösen Sie mit der Fourierreihen-Methode das folgende 1D-Problem:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) &= u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) &= x,\ u_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Plotten Sie mit Matlab die ersten 10-Gliedern der Fourierreihe.

4.

Zeigen Sie, dass

$$E(t) = \int_0^{\ell} (u_t^2 + a^2 u_x^2) \mathrm{d}x = \text{Konst.},\ \ t > 0$$

für die Wellengleichung $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ mit gewissem (RB) und (AB).

5.

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= \sigma u_{xx},\ \sigma \neq 1 \text{ auf } [0,\ell], \\ u(0,t) &= u(\ell,t) = T_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Wie soll man die Konstanten α, β und γ für die Transformation

$$\begin{aligned} t &\mapsto \alpha t, \\ x &\mapsto \beta x, \\ u &\mapsto u + \gamma \end{aligned}$$

definieren so, dass wir die folgenden Gleichungen bekommen ?

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \text{ auf } [0, \pi], \\ u(0,t) &= u(\pi, t) = 0. \end{aligned}$$

6.

Für eine eindimensionale Stange mit der Länge $L = 1$, Dichte $\rho = 1$, Wärmekapazität $c_w = 1$ und Wärmeleitfähigkeit $k = 0.02$ suchen wir die numerische Lösung (Temperatur) der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} c_w \rho u_t(x,t) &= k u_{xx}(x,t) \text{ in } \Omega = [0,1], \\ u(x,0) &= 0 \text{ in } \Omega = [0,1], \\ u(0,t) &= 0.25, \; u(1,t) = 0 \text{ für } t > 0. \end{aligned}$$

Implementieren Sie das Problem im Zeitraum $T = [0, 16]$ mit vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten für die zeitliche Ableitung.

Hinweis : *Schreiben Sie eine Matlab file* `heat1D.m`*, und erfüllen Sie der folgenden Code*

```
...
x=linspace(0,1,Nx);        %x in Omega
h=...%uniforme ortliche Schrittweite
dt=...%uniforme zeitliche Schrittweite
t_max=...%maximale Zeit
t=...%Anfangszeit
it=...%erste Iterationsschritt
Unow=zeros(1,Nx);          %jetzige numerische Loesung
...
Unew=Unow;

rodx=linspace(0,1,600);%fuer Grafik von der Stange

while t<=t_max

for i=2:Nx-1
  Unew(i)=...%Differenzenquotient
end

plot(x,Unew,'r');
```

```
hold on
 plot(rodx,0,'bs');
title(['t=',num2str(t)]);
xlabel('x');
ylabel('Temperatur');
pause(0.1);
Unow=Unew;

hold off

...%Update Zeit
...%Update Iterationsschritte
end
```