Serie 3

1.

Schreiben Sie den Laplace-Operator

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

in Polarkoordinaten (r, ϕ).

2.

Sei $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= x^2 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass eine Lösung von diesem Problem nicht in $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ sein kann.
Hinweis: Falls $u \in \mathcal{C}^2$, finden Sie einen Punkt $(x_0, y_0) \in \overline{\Omega}$ mit $\Delta u(x_0, y_0) = 2$.

3.

Sind die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x \text{ in } \Omega = (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(x,y) &= 2\log(x^2+y^2) \text{ in } \Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{B}(0,1) \\ u(x,y) &= 28\sin(x)\sinh(y) \text{ in } \Omega = (0,\pi) \times (0,\infty) \end{aligned}$$

und

$$u(x,y) = 0 \text{ in } \Omega \text{ beliebig}$$

Lösungen von

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Widerspricht es unserem Satz über die eindeutigkeit der Lösung ?

4.

Für welchen Werten von $a \in \mathbb{R}$ und x sind die folgenden Gleichungen

(a) $-4u_{xx} + 2au_{xy} - u_{yy} = 0$

(b) $-u_{xx} + 2xu_{xy} - 5u_{yy} = axu_x$

elliptisch ?

5.

Beweisen Sie, dass

$$u'(x) = \frac{1}{2h}\big(-3u(x) + 4u(x+h) - u(x+2h)\big) + \mathcal{O}(h^2)$$

gilt.

6.

Modifizieren Sie den Code von Übung 6 (Serie 2) um den Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{1}{\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ \text{ in } (0,1) \\ u(0,t) &= \cos(t),\ u(1,t) = -\cos(t) \\ u(x,0) &= \cos(\pi x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(\pi x) \end{aligned}$$

zu lösen.

Hinweis: Die Ableitung in der (AB) soll man auch mit einen Differenzenquotienten approximieren.

Bestimmen Sie die exakte Lösung und dann plotten Sie die exakte und die numerische Lösung.

7.

Betrachten Sie die *sog.* gedämpfte Wellengleichung der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ \text{ für } x \in (0,1) \quad \text{und} \quad t > 0, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \\ u(x,0) &= f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie eine formale Lösung des Problems.
(b) Sei $u = u(x,t)$ eien glatte Lösung des obigen Problems und sei

$$E(t) = \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(x,t) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2(x,t)\right)\mathrm{d}x.$$

Beweisen Sie die Ungleichung

$$E(t) \leq E(0) \ \text{ für } \ t \geq 0.$$