Serie 4

1.

Betrachten Sie die eindimensionale Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= x(x+3)e^x \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0 \;\text{ auf }\; \partial\Omega. \end{aligned}$$

a) Überprüfen Sie, dass die exakte Lösung

$$u(x) = x(1-x)e^x$$

lautet.

b) Schreiben Sie einen Matlab-Code `FDPoisson1D.m`, um dieses Problem zu lösen.

c) Plotten Sie die exakten Lösungen zusammen mit den numerischen Lösungen für $N = 5,\ 10,\ 15$ innneren Punkten.

2.

Wir diskretisieren mit der Finiten-Differenzen-Methode das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)\times(0,1), \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Berechenen Sie die Matrix A und den Vektor b vom linearen Gleichungssystem

$$AU = b$$

für $N = 3$ inneren Punkten. Hierfür berechenen Sie mit der **klassischen** Ordnung und dann mit der **rot-schwarz**-Ordnung: Für $h = \frac{1}{N+1}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \Omega_h^U &= \{(x,y) \in \Omega_h \,:\, (x+y)/h \text{ ist ungerade}\} \text{ und} \\ \Omega_h^G &= \{(x,y) \in \Omega_h \,:\, (x+y)/h \text{ ist gerade}\}. \end{aligned}$$

Wir zählen zuerst Ω_h^U(mit der **klassischen** Ordnung) und dann Ω_h^G.

3.

Wir betrachten die Poisson Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)\times(0,1), \\ u(x,y) &= g(x,y) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $f(x,y) = ((3x+x^2)y(1-y)+(3y+y^2)x(1-x))\exp(x+y)$. Die Funktion $g(x,y)$ ist gegeben so, dass die exakte Lösung ist $u(x,y) = x(1-x)y(1-y)\exp(x+y)$.

Schreiben Sie ein Matlab-File `FDPoisson2D.m`. Dabei berechenen Sie die numerischen Fehler und plotten Sie exakte bzw. numerische Lösung. Die Grundgerüste vom Matlab-Programm ist wie folgt gegeben:

```
% RHS
 f=inline('((3.*x+x.^2).*y.*(1-y)+(3.*y+y.^2).*x.*(1-x)).*exp(x+y)','x','y');
% Dirichlet Bedingungen
 g1=inline('...','x','y');
 g2=...;
 g3=...;
 g4=...;

% Uniforme Schrittweite
 h=1/(n+1);

% Berechnung von A KEIN delsq bitte !!
 ...
% Berechnung von b
 b=zeros(n*n,1);
 ...
% Loesung der Gleichungssystem
 u=A\b;

% Exakte Loesung

 xx=linspace(0,1,n+1);
 yy=linspace(0,1,n+1);

 fexa=inline('x.*(1-x).*y.*(1-y).*exp(x+y)','x','y');
 uexakt=zeros(n*n,1);
 for i=1:n
   for j=1:n
     uexakt(i+(j-1)*n)=feval(fexa,i*h,j*h);
   end
 end

% Berechnung der Fehler
 ...
% Visualisierung
 xx=ones(n+2,1)*[0:h:1];
 yy=flipud(xx');
% Unit square
 G=((xx>0) & (yy>0) & (xx<1) & (yy<1));
```

```
 k=find(G);
 G=zeros(size(G));
 G(k)=(1:length(k))';
 U=G;
% Plot numerische Loesung
 U(G>0)=full(u(G(G>0)));
 figure(1)
 surf(xx,yy,U);
% Plot Fehler
 err=...
 U(G>0)=full(err(G(G>0)));
 figure(2)
 surf(xx,yy,U);
```

4.

Wir betrachten die Poisson Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 2 \quad \text{in} \quad \Omega = (1,4) \times (0,2), \\ u(1,y) &= 0, \; u(4,y) = 0 \; \text{ für } y \in [0,2] \\ u_y(x,0) &= 0, \; u_y(x,2) = 0 \; \text{ für } x \in [1,4]. \end{aligned}$$

Die exate Lösung ist wie folgt gegeben:

$$u(x,y) = (x-1)(x-4).$$

Schreiben Sie ein Matlab-File `FDPoisson2Dmod.m`. Dabei berechenen Sie die Fehler-Ordnung mit Hilfe von L^2-Norm und plotten Sie exakte bzw. numerische Lösung.