Serie 5

1.

Wir betrachten die elliptische Gleichung

$$\begin{aligned} -4u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} &= f(x,y) \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Für $h = 1/(N+1)$, führen wir die Gitter Punkten $x_i = ih$ und $y_j = jh$ $(0 \leq i, j \leq N+1)$ ein. Damit kann man die folgenden Differenzen definieren:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \\ u_{yy}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \\ u_{xy}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{4h^2}. \end{aligned}$$

a) Für $N = 3$, berechnen Sie die Matrix A und den Vektor b von dem Gleichungssystem $Ax = b$.
b) Nehmen Sie statt (1) die folgende Randbedingung:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 1, \qquad u(0,y) = 0, \\ u(x,1) &= 0, \qquad u(1,y) = 0. \end{aligned}$$

Dann probieren Sie wie Teil a).
c) Nehmen Sie noch statt (1) die folgende Randbedingung:

$$\begin{aligned} u_y(x,0) &= 0, \qquad u(0,y) = 0, \\ u(x,1) &= 0, \qquad u(1,y) = 0. \end{aligned}$$

Dann probieren Sie auch wie Teil a).

2.

Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d^4u}{dx^4}(x) &= f(x) \;\text{ in } (0,1), \\ u(0) = u'(0) &= u(1) = u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Finden Sie die Variationsformulierung und das Minimierungsproblem.
Hinweis: $V = \{v : v, v' \text{ stetig in } [0,1],\ v'' \text{ stückweise stetig und } v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}$.

3.

Wir definieren

$$V = \{v \,:\, v \text{ stetig und } v' \text{ stückweise stetig beschränkt}, v(0) = v(1) = 0\}.$$

Beweisen Sie, dass falls w stetig in $[0,1]$ ist und

$$\int_0^1 w(x)v(x)dx = 0 \quad \forall v \in V.$$

Dann hat man $w(x) = 0$ für $x \in [0,1]$.