Serie 6

1.

Wir betrachten die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1) \\ u(0) &= 0, \; u(1) = 0. \end{aligned}$$

Während dem FEM Prozess, bekommt man einen Gleichungssystem $Ax = b$. Beweisen Sie, dass die Matrix A symmetrisch und positiv definit ist.

2.

Geben Sie die schwache Formulierung der Helmholtz-Gleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= f(x) \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1) \\ u(0) &= 0, \; u(1) = 0. \end{aligned}$$

3.

Wir betrachten die Helmholtz-Gleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= (1+\pi^2)\sin(\pi x) \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1) \\ u(0) &= 0, \; u(1) = 0. \end{aligned}$$

Die exakte Lösung lautet $u(x) = \sin(\pi x)$. Lösen Sie das Problem durch FEM mit einer uniformen Schrittweite $h = \frac{1}{N+1}$, d.h. wir nehmen $N+1$ Elementen. Um $\langle f, \phi_i \rangle$ auf $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq N$ zu approximieren, benutzen Sie die Trapez-Formel. Schreiben Sie ein Matlab-Code `FEHelmholtz1D.m` und plotten Sie die numerische (bzw. exakte) Lösung u_h für $N = 10, 50, 100$.

Hinweis: *Benutzen Sie, dass* $x_{i-1} = x_i - h$.

4.

Nur für die Leuten, die es machen wollen. Es gibt keinen Bonus oder Malus.

Ein einfaches Modell für die Temperaturverteilung in einem quadratischen Zimmer $(-1,1) \times (-1,1)$ ist durch die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y)$$

gegeben. Wir nehmen an, dass die Mauern isoliert sind (d.h. man hat Neumann-Randbedingungen $\partial u / \partial n = 0$, die mit Rückwerts-Differenzen approximiert werden). Wir setzten ein Fenster, das nicht isoliert ist (hier verwendet man Dirichlet-Randbedingungen). Wir stellen auch eine Tür (die Wärme kommt von einem anderen Raum, d.h. man wird die Tür auch mit Dirichlet-Randbedingungen betrachten). Falls es zu kalt ist, benutzt man eine Heizung (wird in der Quelle f gestellt).

Schreiben Sie eine Matlab-File `zimmer.m`:

```
out=-10; % Temp. draussen
tuer=20; % Temp. Tuer
heiz=0;  % Heizung
n=50;    % Anzahl der inneren Gitterpunkten

zimmertempFD(out,tuer,heiz,n);
```

Die Matlab-File `zimmertempFD.m` zeichnet, diskretisiert das Zimmer, und löst die Poisson-Gleichung. Die folgenden Matlab-Funktionen sind hilfreich: `numgrid`, `delsq`, `sparse`, `full` zusammen mit `help` und `doc`. Das Skelett von dieser Matlab-File hat die folgende Struktur:

```
function zimmertempFD(out,tuer,heiz,n)

h=2/(n-1);
% Gestohlen von Matlab
% Nummerierung der Gitterpunkten in (-1,1)x(-1,1):
x=ones(n,1)*[-1,(-(n-3):2:(n-3))/(n-1),1];
y=flipud(x');
G=numgrid('S',n);

T=G;
F=G;
H=G;
M=G;

% Wir zeichnen eine Tuer:
T=((x==-1+h) & (y>-1) & (y<-0.5));
% Wir zeichnen die Mauern:
M=((x==-1) & (y>=-1) & (y<=1))+ ...
  ((x==1) & (y>=-1) & (y<=1))+ ...
  ((x>=-1) & (x<=1) & (y==-1))+ ...
  ((x>=-1) & (x<=1) & (y==1));
% Ein Fenster:
F=...;
% Eine (oder mehrere) Heizung
H=...;
% Visualisierung
figure(1)
spy(G,'b'); % Inneren Gitterpunkten
hold on
spy(M,'k'); % Schwarzen Mauern
spy(T,'y'); % Gelbe Tuer von Ikea
spy(F,'c'); % Helles Blaues Fenster
spy(H,'r'); % Rote Heizung
hold off

% Berechnung von A und b
k=find(G);
A=delsq(G); % 5-Punkte-Stern diskretisierung
            % sparse mode
tue=[]; % Anzahl Tuer
fe=[];  % Anzahl Fenster
b=zeros(length(k),1);
```

```
...
no=G(i,j); % man betrachtet alle Gitterpunkten in G
if no~=0,
% man betrachtet die Nachbarn von G(i,j)
% falls eine Nachbar null ist, dann sind wir
% entweder auf einer Mauer, auf einer Tuer
% oder auf einem Fenster.
% Man muss es nachpruefen:
% Falls T(i,j)==1, sind wir auf einer Tuer
% und man muss es speichern mit "fe=[fe no]",
% Falls F(i,j), usw
...

A=A/(h^2);

he=G(find(H)); % Findet der Heizung

b(tue)=... % Dirichlet-RB fuer die Tuer
b(fe)=... % Dirichlet-RB fuer das Fenster
b(he)=heiz*(113e-1); % Heizung (keinen physikalischen Grund)

% Loesung des Gleichungssystems
u=A\b;

% Visualisierung
U=G;
U(G>0)=full(u(G(G>0)));
% G>0 --> fuer die inneren Gitterpunkte
% G(G>0) --> gibt die Anzahl der Gitterpunkten
% u(G(G>0)) --> berechnet die Temperatur an dieser Stelle
% full --> da alles sparse war.
figure(2)
surf(x,y,U);
```

- Zeichen Sie ein quadratisches Zimmer mit einer Tür, einem Fenster und einer Heizung. Für $n = 50$ finden Sie ein Beispiel auf der Web-Seite.
- Diskretisieren Sie das Zimmer mit Hilfe von `delsq`.
- Berechnen Sie die Matrix A und den Vektor b.
- Modellisieren Sie die Temperatur im Sommer: draussen 25 Grad, Tür 22 Grad.
- Modellisieren Sie die Temperatur im Winter (ohne Heizung): draussen -10 Grad, Tür 17 Grad.
- Modellisieren Sie die Temperatur im Winter (mit Heizung): draussen -10 Grad, Tür 17 Grad, Heizung 25 Grad.
- Sie können den Code modifizieren und Ihren Zimmer modellisieren.
  Hinweis: *Falls das Zimmer nicht quadratisch ist, um* ***delsq*** *zu benützen, muss man die Matrix* ***G*** *so ändern:*

  ```
  G=((x>0) & (y>0) & (x<7) & (y<3)); % rechteckiges Zimmer
  G=(G&(1-L)); % man kann auch ein stueck L von G wegnehmen.
  ... % Definitionen von M,T,H,F und visualisierung
  ```

```
k=find(G);
G=zeros(size(G));
G(k)=(1:length(k))';
A=delsq(G);
```