Serie 7

1.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon. Finden Sie die schwache Formulierung des Problems

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (c(x,y)\nabla u(x,y)) &= f(x,y) \ \text{ in } \Omega \\ u(x,y) &= 0 \ \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

2.

Beweisen Sie die folgende Behauptung.

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{j+1} & \text{für } \frac{1}{j+1} \le x \le \frac{1}{j},\ j = 1,\dots,n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

ist eine Cauchy-Folge in $L := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ stückweise stetig und } \int_0^1 |f|^2 < \infty\}$. Aber $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \notin L$.

3.

Seien

$$\begin{aligned} V &:= \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ stetig und } \int_0^1 |f|^2 < \infty\}, \\ f_n(x) &:= (\sqrt{1-(2x-1)^2})^n \quad \text{und} \quad f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie $f_n \in V \ \forall n$, aber $f \notin V$.
b) Zeigen Sie $f_n \in L^2(0,1) \ \forall n$ und $f \in L^2(0,1)$.

4.

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 27 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ nicht Riemann-integrierbar ist.

5.

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

a) Falls die schwache Ableitung von $u \in L^2(\Omega)$ existiert, dann ist sie eindeutig.

b) Falls $u \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$, dann ist die schwache Ableitung von u gleich der üblichen Ableitung.

6.

Wir betrachten die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} 2x^2 & : \quad 0 < x \leq 1 \\ 3x^2 - 2x + 1 & : \quad 1 < x < 3. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die erste und zweite schwachen Ableitungen dieser Funktion.

b) Berechnen Sie die Normen $\|u\|_{H^2}$, $\|u'\|_{H^1}$ und $\|u''\|_{H^0}$.