Serie 8

1.

Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x| < 1\}$ und $u(x) = \ln\, \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{|x|}\right)$. Zeigen Sie, dass $u \in H_0^1(\Omega)$.

2.

Seien V ein Hilbertraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige V-elliptische Bilineare Form und $l : V \to \mathbb{R}$ eine stetige Form. Zeigen Sie, falls das Problem

finde $u \in V$ *so, dass* $a(u,v) = \ell(v)\ \forall v \in V$

eine Lösung hat, dann ist sie eindeutig.
Zeigen Sie auch, dass die Lösung die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\|u\|_V \leq C_1 \|\ell\|$$

mit $\|\ell\|$ die kleinste Konstante so, dass $\|\ell(v)\| \leq C_2 \|v\|\ \forall v \in V$ erfüllt ist.

3.

Zeigen Sie, dass das folgende Problem die Voraussetzung von *Lax-Milgramm* erfüllt:

finde $u \in H_0^1(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^2$ *so, dass*

$$a(u,v) = \ell(v)$$

mit

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v, \quad \ell(v) = \int_\Omega f\, v.$$

4.

Finden Sie die schwache Form des folgenden Problems und zeigen Sie, dass dieses Problem die Voraussetzung von *Lax-Milgramm* erfüllt:

$$\begin{cases} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(c_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + c_2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

5.

Betrachten Sie Ihr *Finite-Elemente-Programm* aus der Serie 6 (Aufgabe 3). Berechenen Sie die Fehler-Ordnung mit Hilfe von L^2-Norm und H^1-Norm. Hierbei benutzen Sie *Matlab-Befehl*, `loglog` für das Verhalten von den numerischen Fehlern und den Gitterschrittweiten

$$\frac{\log \|u^{num} - u^{ext}\|_{L^2(\Omega)}}{\log(h)} \simeq 2, \quad \frac{\log \|u^{num} - u^{ext}\|_{H^1(\Omega)}}{\log(h)} \simeq 1$$

und `gradient` für die ableitung von den Funktionen.