Serie 9

1.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt mit genug glattem Rand $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= u_0 \quad \text{auf} \ \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{auf} \ \Gamma_2. \end{cases}$$

Wie lauten die Variationsformulierung und die entsprechende Diskretisierung durch die Finite-Elemente-Methode ?

2.

Die *Ritz-Methode* lautet:

$$\text{Finde } u \in V \text{ mit } u = \min_{v \in V} J(v).$$

Hierbei nehmen wir $V = \{v : v \text{ ist stetig und } v(0) = 0\}$ und das Funktional $J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (v'(x))^2 \mathrm{d}x$ für $v \in V$.

a) Wie lauten die klassische Formulierung und die exakte Lösung ?
b) Die *Finite-Elemente-Approximation* mit der Ritz-Methode lautet $u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(x)$. Vergleichen Sie diese Lösung mit der Galerkin-Methode.

3.

Sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige und V-elliptische Bilinearform auf $V \times V$ mit einem Hilbertraum $(V, \|\cdot\|_V)$. Zeigen Sie, dass die Energienorm $\|u\|_a = \sqrt{a(u,u)}$ zur Norm $\|u\|_V$ äquivalent ist.

4.

Sei $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= 1 \quad \text{in} \ \ \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Die Funktionen

$$\varphi_1(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y), \qquad \varphi_2(x,y) = \sin(3\pi x)\sin(\pi y),$$
$$\varphi_3(x,y) = \sin(\pi x)\sin(3\pi y), \ \text{und} \ \varphi_4(x,y) = \sin(3\pi x)\sin(3\pi y)$$

sind in $H_0^1(\Omega)$. Wir setzen $V_4 := \mathbf{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_4\}$. Berechnen Sie die Steifigkeitsmatrix A und den Lastvektor b. Damit kann man leicht die Approximation $u_4(x,y) = \sum_{j=1}^{4} u_j \varphi_j$ rechnen.

5.

Sei $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ ein Element. Berechnen Sie die linearen Basisfunktionen mit

$$\varphi_p(p') = \begin{cases} 1 & \text{falls } p = p', \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Steifigkeitsmatrix für die Bilinearform $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$.

6.

Die Basisfunktionen für das quadratische bzw. kubische Element sind wie die folgende Tabelle gegeben:

Order des Elementes	Basisfunktionen $N_i(L_1, L_2)$
quadratisch	$N_1 = L_2(L_2 - L_1)$, $N_2 = 4L_1L_2$, $N_3 = L_1(L_1 - L_2)$
kubisch	$N_1 = 0.5L_2(L_1 - 2L_2)(2L_1 - L_2)$, $N_2 = 4.5L_1L_2(2L_2 - 2L_1)$, $N_3 = 4.5L_1L_2(2L_1 - L_2)$, $N_4 = 0.5L_1(L_1 - 2L_2)(2L_1 - L_2)$

Hierbei definieren wir $L_1 = \xi$, $L_2 = 1 - \xi$ für $\xi \in [0,1]$.

a) Plotten Sie die gegebenen Basisfunktionen.
b) Berechenen Sie die Steifigkeitsmatrix bzw. Massenmatrix für jeweilgem Element mit der folgenden Formel:

$$\int_0^1 L_1(\xi)^p L_2(\xi)^q d\xi = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}, \quad p, q \in \mathbb{N}_0.$$

c) Implementieren Sie das folgende Problem mit dem quadratischen bzw. kubischen Element:

$$\begin{aligned} -u'' + k\,u &= 1, \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $k = 10$.

d) Berechenen Sie die exakte Lösung des Problems aus Teil (c) und damit die Fehler-Ordnung durch H^k-Norm mit $k = 0, 1$. Wie sehen diese Fehler aus, wenn man z.B. $k = 1, 2, 4, 8, 16, 32$, usw. nimmt ?