

Zusammenfassung: Kapitel 2

- Typen-Einteilung von linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung: elliptisch, hyperbolisch, parabolisch.
- Die *Wellengleichung* auf $[0, \ell]$. Für $u := u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit *Anfangsbedingungen* $u(x, 0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ und *Randbedingungen* $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$.

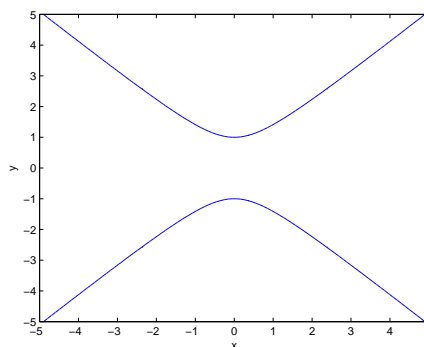
- Die Lösung von d'Alembert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+at) + f(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\zeta) d\zeta.$$

- Die Lösung mit Fourierreihen (Trennung der Variablen):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi at}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi at}{\ell}\right) \right).$$

- Wohl gestelltes Problem.
- Hyperbolisch: $u_{tt} - u_{xx} = 1$ vergleichen mit $t^2 - x^2 = 1$.



- Die *Wärmeleitungsgleichung* auf $[0, \ell]$. Für $u := u(x, t)$:

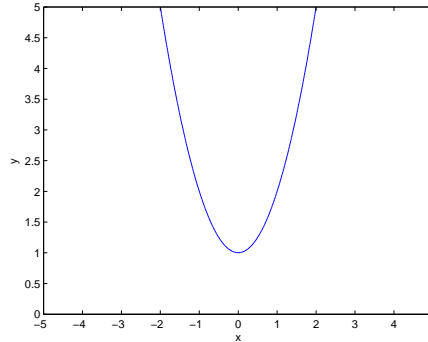
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit *Anfangsbedingung* $u(x, 0) = f(x)$ und *Randbedingungen* $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$.

- Die Lösung mit Fourierreihen:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(an\pi/\ell)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

- Wohl gestelltes Problem.
- Parabolisch: $u_t - u_{xx} = 1$ vergleichen mit $t - x^2 = 1$.



- Die *Laplace/Poisson-Gleichungen* in $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Für $u := u(x, y)$:

$$-\Delta u = 0 \quad (\text{Laplace}) \quad -\Delta u = f \quad (\text{Poisson}) \quad \text{in} \quad (0, 1) \times (0, 1)$$

mit *Randbedingung* $u = g$ auf $\partial\Omega$.

- Die Lösung mit Fourierreihen im Viereck $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) (a_n \sinh(n\pi y) + b_n \sinh(n\pi(1 - y))) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi y) (c_n \sinh(n\pi x) + d_n \sinh(n\pi(1 - x))).$$

- Maximumprinzip.
- Elliptisch: $u_{xx} + u_{yy} = 1$ vergleichen mit $x^2 + y^2 = 1$.

