

# Zusammenfassung: Kapitel 3

- Wir betrachten die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= f(x, y) \quad \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, y) &= g(x, y) \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Für eine Schrittweite  $h = \frac{1}{N+1}$  definieren wir

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_h^2 &= \{(ih, jh) : i, j \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_h &= \mathbb{R}_h^2 \cap \Omega, \quad \partial\Omega_h = \mathbb{R}_h^2 \cap \partial\Omega, \quad \bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \partial\Omega_h. \end{aligned}$$

- 2. Ordnung Finite-Differenzen Verfahren für die Poisson-Gleichung: Suche  $u_h : \bar{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(x, y) &= f_h(x, y) =: f|_{\Omega_h}(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \Omega_h \\ u_h(x, y) &= g_h(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \partial\Omega_h \end{aligned}$$

mit

$$\Delta_h u_h(x, y) = \frac{1}{h^2} (u_h(x+h, y) + u_h(x-h, y) + u_h(x, y+h) + u_h(x, y-h) - 4u_h(x, y)),$$

andere Formulierung

$$AU = b.$$

- Diskretes Maximumprinzip: Sei  $u_h : \bar{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$-\Delta_h u_h(x, y) = 0 \quad \text{in } \Omega_h.$$

Dann gilt

$$\min_{\partial\Omega_h} u_h \leq u_h(x, y) \leq \max_{\partial\Omega_h} u_h \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}_h.$$

- Vergleichsprinzip: Für  $u_h, v_h : \bar{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(x, y) &\leq -\Delta_h v_h(x, y) \quad \text{in } \Omega_h \\ u_h &\leq v_h \quad \text{auf } \partial\Omega_h. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$u_h(x, y) \leq v_h(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega_h.$$

- Die diskrete Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(x, y) &= f_h(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \Omega_h \\ u_h(x, y) &= g_h(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \partial\Omega_h \end{aligned}$$

hat eine eindeutige Lösung.

- Sei  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ , sei  $u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$  die Lösung der Poisson-Gleichung. Sei  $u_h : \overline{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$  die Lösung der diskreten Poisson-Gleichung. Dann gilt

$$\max_{\Omega_h} |u_h - u| \leq \text{Konst} \cdot h^2.$$

- Verallgemeinerungen: Neumann RB, allgemeines Gebiet, allgemeine elliptische PDG 2. Ordnung.