Zusammenfassung: Kapitel 4

- Wir betrachten die eindimensionale Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad \text{für} \quad x \in \Omega =]0,1[\\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

  mit f stetig und beschränkt.

  Wir erhalten zwei anderen Formulierungen:

  Variationsformulierung/schwache Formulierung:

$$\text{Finde } u \in V \text{ so, dass } (u', v') = (f, v) \quad \forall\ v \in V,$$

  mit einem Vektorraum V und einem Skalarprodukt $(u, v) = \displaystyle\int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$.

  Minimierungsproblem:

$$\text{Finde } u \in V \text{ so, dass } F(u) = \min_{v \in V} F(v),$$

  mit der Funktional $F(v) = \frac{1}{2}(u', v') - (f, u)$.

- Um numerischen Verfahren zu bekommen, nehmen wir einen endlichdimensionalen Unterraum V_N von V ($\dim V_N = N$).

  Galerkin-Verfahren:

$$\text{Bestimme } u_N \in V_N \text{ so, dass } (u_N', v_N') = (f, v_N) \quad \forall\ v_N \in V_N.$$

  Ritz-Verfahren:

$$\text{Bestimme } u_N \in V_N \text{ so, dass } F(u_N) = \min_{v_N \in V_N} F(v_N).$$

- Wir bekommen die *Finite-Elemente-Methode* wenn wir Galerkin mit einer speziellen Wahl von V_N verwenden. Falls wir die Basisfunktionen $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ wohl definieren, bekommen wir am Ende ein Gleichungssystem

$$A\zeta = b$$

  mit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ schwach besetzt, symmetrisch und positiv definit. Wir haben $a_{i,j} = (\varphi_i', \varphi_j')$ und $b_j = (f, \varphi_j)$.

  A ist die *Steifigkeitsmatrix* und b ist der *Lastvektor*.

- Das selbe wird auch in 2D betrachten. Die FEM lautet:

  1) Sei T eine Triangulisierung von einen Polygon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit endlich vielen Dreiecken $\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{M} K_j$.

  2) $V_N := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) : u_{|K_j} = a + bx + cy \ \forall\, K_j \in T, u_{|\partial\Omega} = 0\}$.

  3) Sei $N(T)$ die Menge aller Knoten. Wir definieren die Basisfunktionen $\{\varphi_p\}_{p \in N(T)}$ so, dass $\varphi_p \in V_N$ und $\varphi_p(p') = \delta_{p,p'}$ (mit dem Kronecker-Delta $\delta_{p,p'}$).

  4) Suche eine Approximation $u_N = \sum_{j=1}^{N} \zeta_j \varphi_j \in V_N$ so, dass

$$a(u_N, v_N) = \ell(v_N) \quad \forall \quad v_N \in V_N$$

  oder, in Matrix-Form,

$$A\zeta = b.$$

- Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, definieren wir einen Hilbertraum

$$L^2(\Omega) = \{f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \colon (f \text{ messbar }) \int_\Omega |f|^2 d\mu < \infty\}.$$

  Seien $u \in L^2(\Omega)$ und $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. $v \in L^2(\Omega)$ heisst die *schwache Ableitung der Ordnung $k = |\alpha|$ von u* falls

$$(v, \varphi)_{L^2(\Omega)} = (-1)^k (u, \partial^\alpha \varphi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^k(\Omega).$$

  Sei $k \geq 0$, die *Sobolevräume* $H^k(\Omega)$ sind definiert durch

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \colon \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall\, |\alpha| \leq k\}.$$

  Mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_k = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

  sind $H^k(\Omega)$ Hilberträume.

  Spursatz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit stückweisem $\mathcal{C}^1$ Rand. Die lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\partial\Omega) \\ v & \longmapsto & v_{|\partial\Omega} \end{array}$$

  lässt sich in eindeutiger Weise zu einer stetigen linearen Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \gamma : H^1(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\partial\Omega) \\ v & \longmapsto & \gamma(v) \end{array}$$

  fortsetzen.

  Sei V ein Hilbertraum mit einer Norm $||\cdot||$. Die Bilinearform $a \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst *V-elliptisch*, falls

$$\exists\ \alpha > 0 \ \text{ so, dass } \ a(v,v) \geq \alpha ||v||^2 \ \forall\, v \in V.$$

  Sie heisst *stetig*, falls

$$\exists\ C > 0 \ \text{ so, dass } \ |a(u,v)| \leq C||u|| \cdot ||v|| \ \forall\, u, v \in V.$$

  Satz von Lax-Milgram. Seien V ein Hilbertraum, $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige, V-elliptische Bilinearform, und $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Linearform. Dann hat das Problem

$$\text{Finde } u \in V \text{ so, dass } a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$$

eine eindeutige Lösung in V.

- Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, stückweise $\mathcal{C}^1$ Rand und $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0(x)u &= f \text{ in } \Omega \\ &+ \text{ Randbedingungen,} \end{aligned}$$

kurz

$$\begin{aligned} Au &= f \text{ in } \Omega \\ &+ \text{ Randbedingungen.} \end{aligned} \tag{1}$$

Voraussetzung: $a_{ij}(x), a_0(x)$ beschränkt, $\exists\, \alpha_1 > 0$ so, dass $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geq \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2 \; \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \Omega$, $\exists\ \alpha_0 \geq 0$ so, dass $a_0(x) \geq \alpha_0 \quad \forall x \in \Omega$.

Wir haben gezeigt, dass die schwache Formulierung von (1) eine eindeutige Lösung für homogene Dirichlet-RB, homogene Neumann-RB (falls $\alpha_0 > 0$), inhomogene Dirichlet-RB (falls $\exists\ u_0 \in H^1(\Omega)$ mit $g = u_{0\,|\partial\Omega}$), und inhomogene Neumann-RB (falls $g \in L^2(\Omega)$ und $\alpha_0 > 0$) hat.

- *Céa-Lemma.* Sei u die Lösung der schwachen Formulierung und u_N die Galerkin-Approximation. Dann gilt

$$||u - u_N||_V \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_N \in V_N} ||u - v_N||_V.$$

Assemblierung der Steifigkeitsmatrix A und des Lastvektors b.

Beispiele von Finite-Elemente in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}^1$-Elemente, isoparametriche Elemente.

- Um die Konvergenz zu zeigen, benutzt man Céa-Lemma mit der Wahl $v_N = I_h u$, wobei $I_h u$ das Interpolationspolynom von u ist. Damit kann man zeigen:

Satz. Für ein polygonales Gebiet Ω, u die exakte Lösung ein elliptisches Problem, und u_h die zugehörige FE-Approximation gilt

$$||u - u_h||_{H^1(\Omega)} \leq Ch^p |u|_{H^{p+1}(\Omega)},$$

falls der Polynomraum des finiten Elementes alle Polynome vom Grad $\leq p$ enthählt und falls $u \in H^{p+1}(\Omega)$ ist.

Satz. Unter ähnlichen Voraussetzung, gilt für lineare Finite-Elemente

$$||u - u_h||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 |u|_{H^{p+1}(\Omega)}$$

- *Variational Crimes*: was passiert, wenn man die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ und/oder die Linearform $\ell(\cdot)$ mit einer Quadraturformel approximiert ?

- FEM für parabolische Gleichung. Als Modelproblem betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega\times]0,T] \\ u(x,t) &= 0 \quad \partial\Omega\times]0,T] \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

  mit $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

  Falls $f \equiv 0$, hat man die Energie-Ungleichung:

$$||u(\cdot,t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathrm{e}^{-1/ct}||u_0||^2_{L^2(\Omega)}.$$

  Nach einer (lineare-)FE-Diskretisierung im Raum, bekommt man das System von gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} M\dot{x}(t) + Ax(t) &= b(t) \\ x(0) &= X_0, \end{aligned}$$

  mit der Massenmatrix M, der Steifigkeitsmatrix A, der rechte Seite $b = ((f,\varphi_j))_{j=1}^N$ und X_0 mit $MX_0 = ((u_0,\varphi_j))_{j=1}^N$. Diese Differentialgleichung kann man, z.B., mit der $\theta-$Methode diskretisieren. Für das Implizite-Euler-Verfahren, haben wir die Konvergenz bewiesen.