# Burgers' Gleichung

Juri Chomé, Olaf Merkert

2. Dezember 2009

# Gliederung

# Gliederung

# Jan Burgers

- Johannes Martinus Burgers (1895 - 1981)
- Physikstudium in Leiden
- Lernt Lorentz, Bohr, Einstein etc. kennen
- Professor mit 23 Jahren in Delft
- Bereich Schiffsbau, elektrische und mechanische Ingenieurwissenschaften
- Gründet ein Labor für Aero- und Hydrodynamik

# Burgers' Gleichung

- Burgers etabliert sich schnell als weltweiter Experte für Strömungsdynamik
- Studiert grossteils Turbulenzen, theoretisch und statistisch
- Hieraus geht u.a. die "Burgers' Gleichung" hervor:
- Beispiel einer nicht-linearen partiellen Diffglch.

# Burgers' Gleichung

- Die viskose Version lautet:

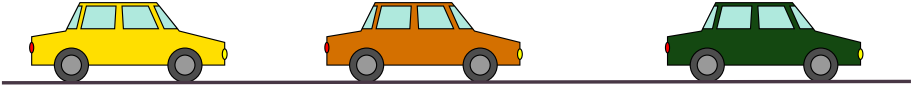
$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = \nu u_{xx}$$

- Nicht-viskose Form ($\nu = 0$) hängt mit den Euler-Gleichungen zusammen
- Keine unmittelbare physikalische Anwendung
- Wird zur Veranschaulichung von "Shocks" benutzt
- Unstetigkeiten und nicht-Eindeutigkeit der Lösung, trotz glatter Anfangsdaten

# Gliederung

# Modellierung

- $\phi : Y \times T \to X$ Abbildung, $X, Y, T \subset \mathbb{R}$ Intervalle
- $x = \phi(y, t)$ Ort eines Teilchens $y$ zur Zeit $t$
- Geschwindigkeit $\partial_t \phi(y, t) = \phi_t(y, t)$ und Beschleunigung $\partial_{tt} \phi(y, t) = \phi_{tt}(y, t)$ eines Teilchens $y$.



- Keine "Überholmanöver": d.h. $\phi(\cdot, t)$ $\forall t \in T$ streng monoton.

$\rightsquigarrow$ Umkehrfunktionen $\forall t$: $\psi : X \times T \to Y$

- $y = \psi(x, t)$ ist das Teilchen an der Stelle $x$ zur Zeit $t$
- Definiere $u(x, t) = \phi_t(\psi(x, t), t)$ die Geschwindigkeit des Teilchens bei $x$ zur Zeit $t$.

- Ersetze $x = \phi(y,t)$:

$$\begin{aligned} \phi_t(y,t) &= u(\phi(y,t),t) \\ \rightsquigarrow \phi_{tt}(y,t) &= \partial_t\, u(\phi(y,t),t) \\ &= u_x(\phi(y,t),t)\cdot\phi_t(y,t) + u_t(\phi(y,t),t)\cdot 1 \end{aligned}$$

- Ersetze $y = \psi(x,t)$:

$$\begin{aligned} \phi_{tt}(\psi(x,t),t) &= u_t(x,t) + u_x(x,t)\cdot\phi_t(\psi(x,t),t) \\ &= u_t(x,t) + u_x(x,t)\cdot u(x,t) \end{aligned}$$

- Annahme: Keine Wechselwirkung, also keine Beschleunigung zwischen Teilchen:

$$\phi_{tt} = 0$$

- Das gibt die Burgers Gleichung:

$$u_t + u\,u_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_t + \partial_x \left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0$$

- Das ist eine hyperbolische Erhaltungsgleichung:

$$u_t + \partial_x\left(F(u)\right) = 0 \qquad F(u) = \frac{1}{2}\,u^2$$

- Testproblem:

$$\begin{cases} u_t + u\,u_x = 0 & \text{in } (0, 2\pi) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \\ u(0,t) = u(2\pi, t) = 0 & \text{für alle } t \\ u(x,0) = u_0(x) = \sin(x) & \text{für alle } x \end{cases}$$

# Gliederung

# Allgemeine Idee

- Man betrachtet eine Schar von Kurven

$$\gamma : (\xi, \eta) \mapsto (x(\xi, \eta), t(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) \text{ mit } \partial_\xi z = 0$$

in den Niveaus einer Lösung $u$

$$u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) = z(\xi, \eta)$$

- Also

$$0 = \partial_\xi z(\xi, \eta) = \partial_\xi u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$$

und mit der Kettenregel und der DGL für $u$ bekommt man (oft) einfache DGLs für die Kurven

# Anwendung auf Burgers' Gleichung

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_\xi u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)) \\
&= u_x(x,t)\;\partial_\xi x(\xi,\eta) + u_t(x,t)\;\partial_\xi t(\xi,\eta) \\
&= u_x \partial_\xi x + \underbrace{u_t}_{-u_x\,u} \partial_\xi t = u_x \left( \partial_\xi x - \underbrace{u}_{z} \cdot \partial_\xi t \right)
\end{aligned}
$$

- DGL für $x$,$t$:

$$\partial_\xi x = z \cdot \partial_\xi t \implies x = z \cdot t + \alpha(\eta)$$

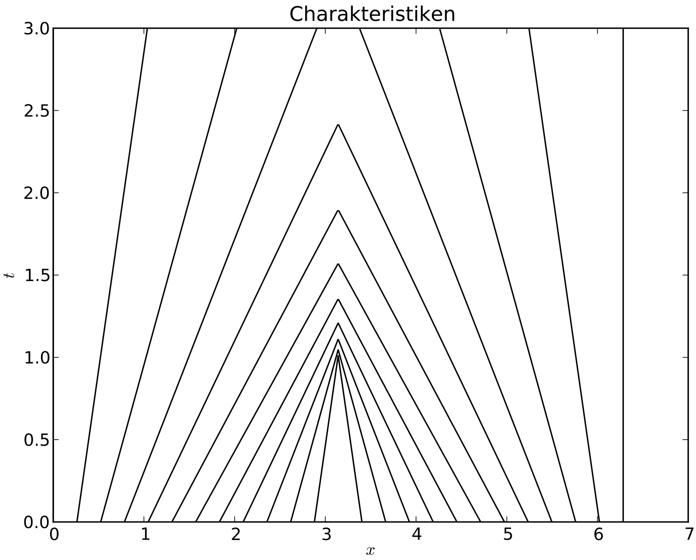
- Wähle $t = \xi$ und $\alpha(\eta) = \eta$, also $x = z \cdot \xi + \eta$

$$z(\xi,\eta) = z(0,\eta) = u(\eta,0) = u_0(\eta)$$

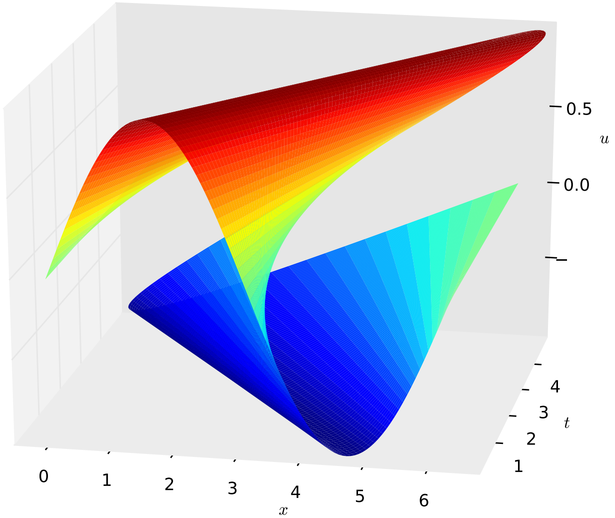
durch Anfangsdaten bestimmt.

. . .

# Bild



# Bild



# Stoß/Schock

- Lineare Gleichung: Parallele Charakteristiken
- Nichtlineare Gleichung: Charakteristiken können sich schneiden
- Bei unserem Beispiel war die Steigung = Funktionswert

$\Rightarrow$ Wenn sich zwei Charakteristiken schneiden, so hat man eine Unstetigkeit

- Diese nennt man *Schock* oder *Stoß*
- Der Schock tritt auch bei glatten Anfangswerten auf!!

$\Rightarrow$ keine klassischen (glatten) Lösungen mehr!!

- "Massenkarambolage"

# Gliederung

# Approximationen

- Seien $u_i^n$ die Mittelwerte zur Zeit $t_n$ über das Kontrollvolumen $K_i$.
- Man verwendet ein explizites Euler-Verfahren in der Zeit:

$$\frac{1}{|K_i|}\int_{K_i} u_t \mathrm{d}x \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

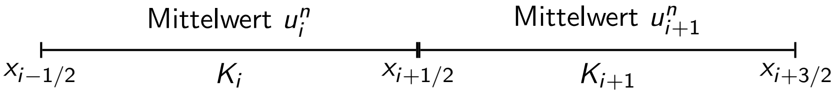
- Man approximiert den Fluss an den Rändern der Elemente:

$$\frac{1}{|K_i|}\int_{K_i} \partial_x f(u) \mathrm{d}x \approx \frac{1}{|K_i|}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right)$$

$$\text{wobei } f(u(x_{i+1/2}, t)) \approx F_{i+1/2}$$

# Upwind-Verfahren

- Berücksichtige Richtung des Informationsflusses




- Entscheide Richtung mit $a_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(u_{i+1} + u_i\right)$:
  - Falls $a_{i+1/2} > 0$, so läuft die Information nach rechts:

$$\text{Setze } F_{i+1/2} = f(u_i^n)$$

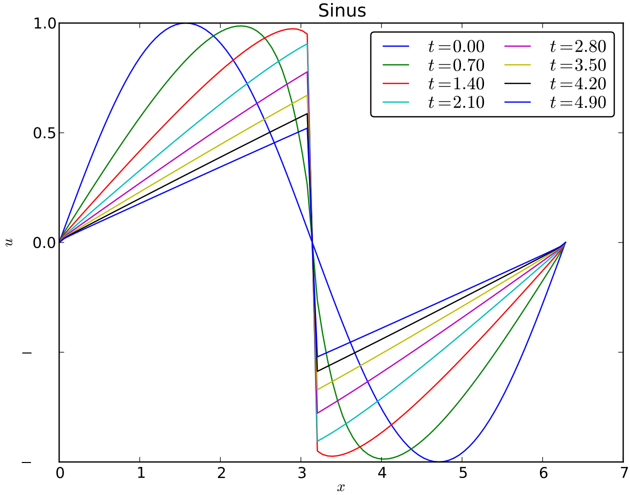
  - Falls $a_{i+1/2} \leq 0$, läuft die Information nach links:

$$\text{Setze } F_{i+1/2} = f(u_{i+1}^n)$$

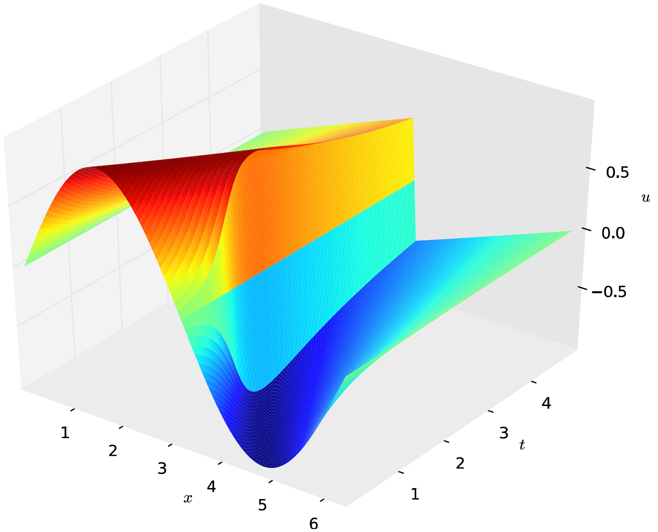
- Das Verfahren lautet dann mit $|K_i| = \Delta x$:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right)$$

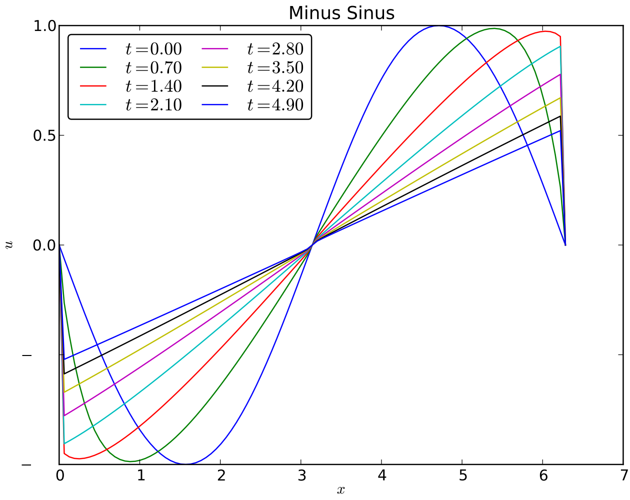
# Beispiel 1


Sinus
1.0
0.5
0.0
u
0
1
2
3
4
5
6
7
x
$t = 0.00$
$t = 0.70$
$t = 1.40$
$t = 2.10$
$t = 2.80$
$t = 3.50$
$t = 4.20$
$t = 4.90$

# Beispiel 1

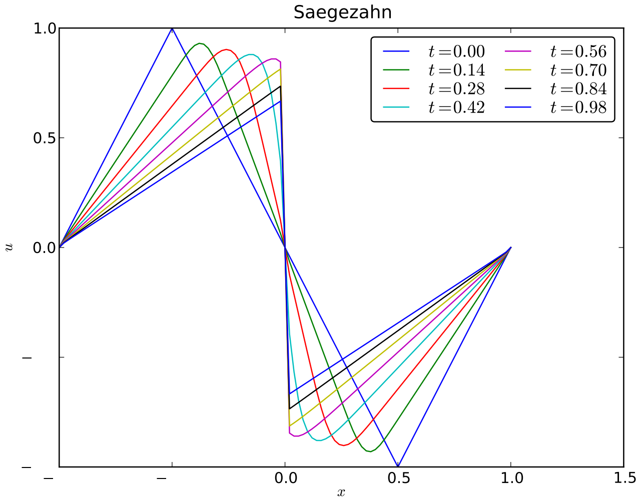


# Beispiel 2



Minus Sinus
$t = 0.00$
$t = 0.70$
$t = 1.40$
$t = 2.10$
$t = 2.80$
$t = 3.50$
$t = 4.20$
$t = 4.90$
1.0
0.5
0.0
$u$
0
1
2
3
4
5
6
7
$x$

# Beispiel 3


Saegezahn
1.0
0.5
0.0
–
–
u
–
–
0.0
0.5
1.0
1.5
x
t =0.00
t =0.14
t =0.28
t =0.42
t =0.56
t =0.70
t =0.84
t =0.98

# Zusammenfassung

- Burgers' Gleichung
- Beispiel einer nichtlinearen Gleichung
- Charakteristiken
- keine klassischen Lösungen
- Stabile Berechnung mit Upwind-Schema

# Danke für eure Aufmerksamkeit!

Noch Fragen?