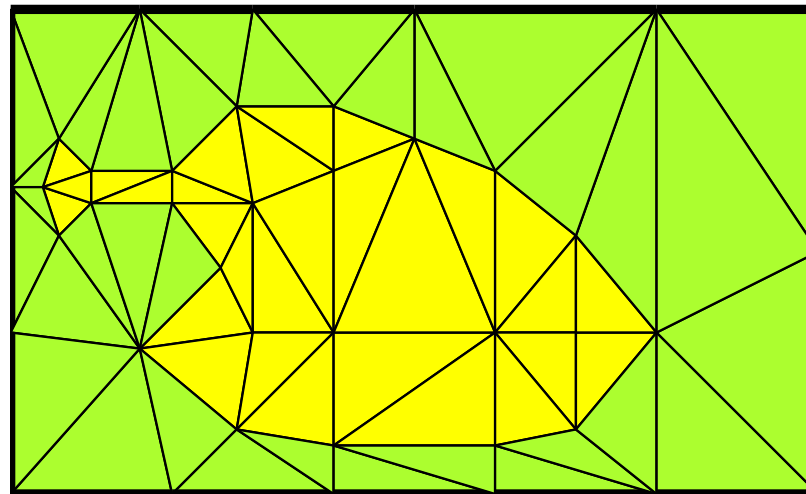


Numerik der partiellen Differentialgleichungen

David Cohen

<http://www.math.unibas.ch/~cohen/>



Inhalt

- Moderne Gleichungen
 - Beispiele von der klassischen Theorie
 - Finite Differenzenverfahren für elliptischen Problemen
 - Variationelle Formulierung von partiellen Differentialgleichungen und Finite Elemente Methoden
 - Finite Differenzenverfahren für parabolischen und hyperbolischen Problemen
- ODER**
Finite Volumen Verfahren

Kapitel 0. Was ist eine partielle Differentialgleichung?

Definitionen (I)

Eine **partielle Differentialgleichung (PDG)** ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion, $u(x, t)$, in der partielle Ableitungen dieser Funktion auftreten.

Beispiel. Die Wärmeleitungsgleichung.

Seien Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^2 , $f : [t_0, \infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion (*Wärmequelle*). Wir suchen $u : [t_0, \infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x, t) = f(x, t)$$

für $t > t_0, x = (x_1, x_2) \in \Omega$

Anwendung: Temperaturverteilung in einem Raum: $u(x, t)$ beschreibt die Temperatur zur Zeit t am Ort x (Matlab).

Definitionen (II)

Dazu brauchen wir noch
Anfangsbedingungen

$$u(x, t_0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega$$

(Vorgabe einer Temperaturverteilung zu Beginn des Prozesses)
und **Randbedingungen**
z.B. **Dirichlet-Randbedingungen**

$$u(x, t) = g(x, t) \quad \text{für } t > t_0, x \in \partial\Omega$$

(Vorgabe einer Temperaturverteilung am Rand)
oder **Neumann-Randbedingungen**

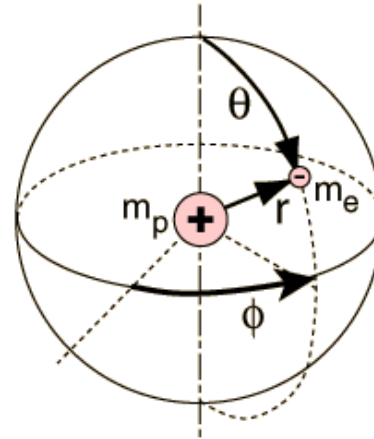
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = g(x, t) \quad \text{für } t > t_0, x \in \partial\Omega$$

(Vorgabe eines Wärmefluss am Rand).

Kapitel I. Moderne Gleichungen

1. Die Schrödinger Gleichung

Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger 1887 – 1961 (Vienna).



Bewegung eines Elektron um ein Proton ist durch die Wellenfunktion $u := u(x, y, z, t)$ beschrieben:

$$-i\hbar u_t = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + \frac{e^2}{r} u,$$

wo \hbar die Plancksche Konstante, m , e Masse, Ladung des Elektrons, und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Nicht lineare Variante: $iu_t + \Delta u = \lambda|u|^2u$.

Anwendung: Schwerewellen im Wasser, Quantenmechanik, Quantenkryptographie, usw.

2. Die Maxwellsche Gleichungen (Vakuum)

James Clerk Maxwell 1831 – 1879 (Edinburgh, UK).



$E := E(x, y, z, t)$ elektrisches Feld ($E : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$).

$B := B(x, y, z, t)$ magnetisches Feld.

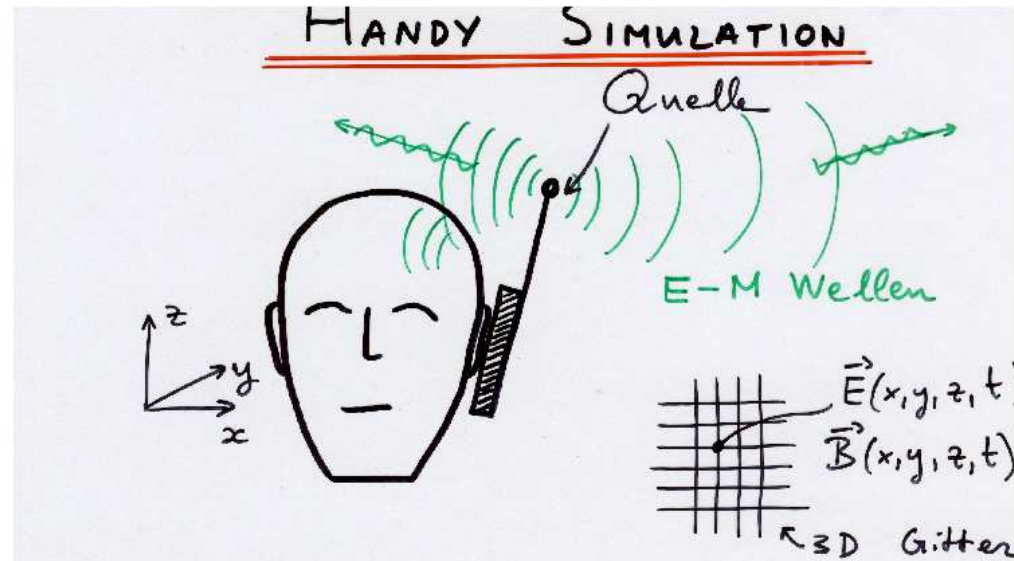
$$-\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \times B = J$$

$$\mu \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0,$$

wobei $J := J(x, y, z, t)$ Stromdichte. ε und μ physik. Konstanten.

Anwendung: Radiowellen Ausbreitung, Röntgenstrahlung, usw.

Handy Simulation



Maxwell Gleichungen (im Vakuum)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \end{array} \right.$$

$\vec{E}(x, y, z, t)$ elektrisches Feld

$\vec{B}(x, y, z, t)$ magnetisches Feld

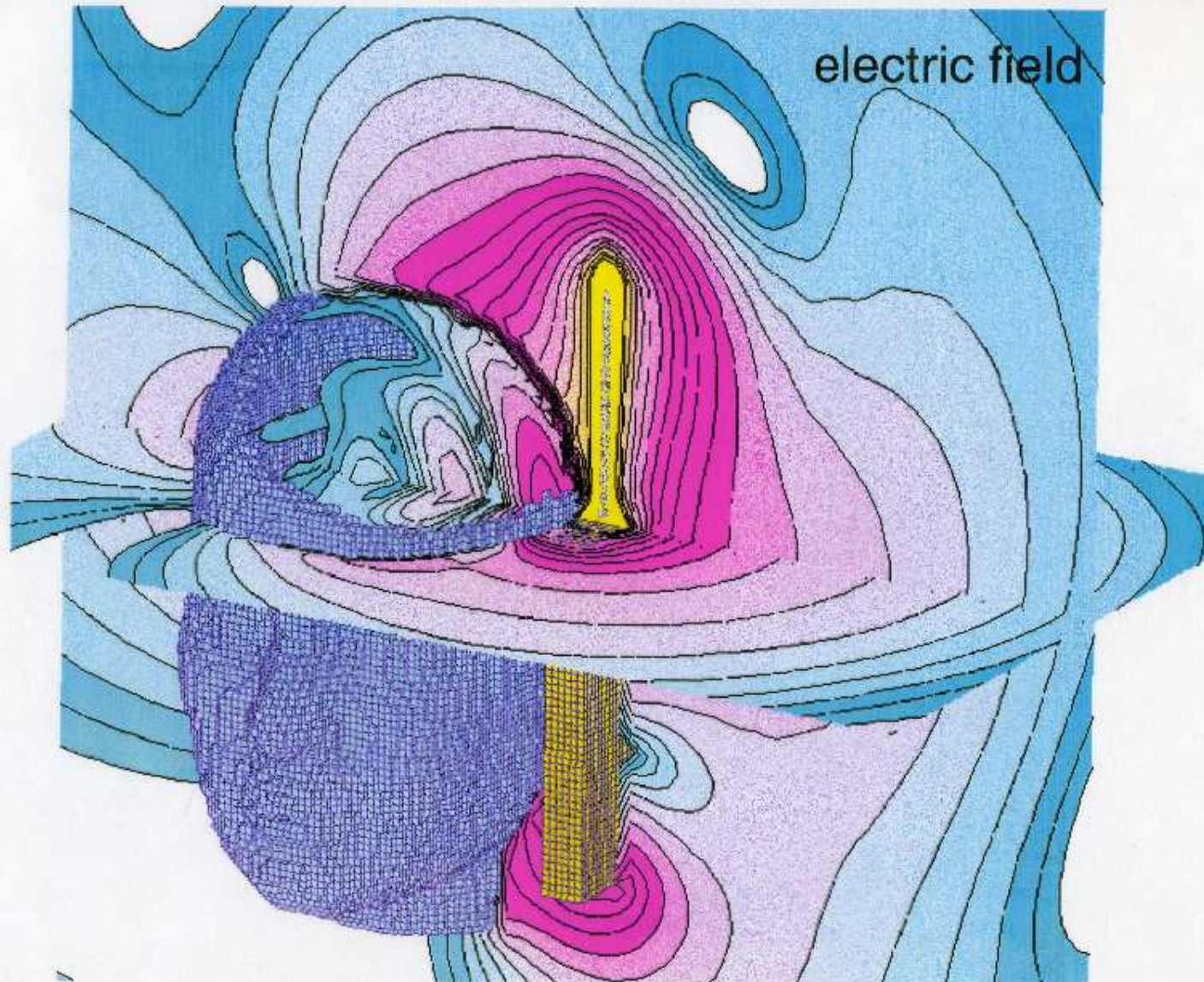
$\rho(x, y, z, t)$ Ladungsdichte

$\vec{J}(x, y, z, t)$ Stromdichte

ϵ_0, μ_0 physik. Konstanten

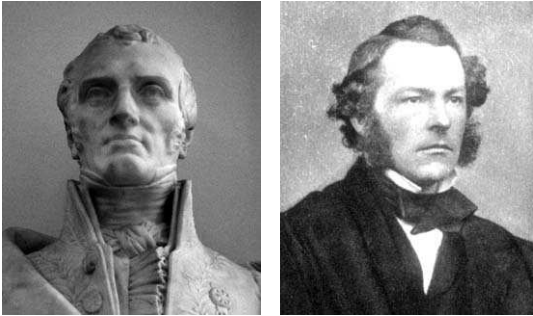
Handy Simulation

Antenna Optimization with FDTD



3. Die Navier-Stokes Gleichung

Claude Louis Marie Henri Navier 1785 – 1836 (Dijon, France).
George Gabriel Stokes 1819 – 1903 (Skreen, Ireland).



$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Geschwindigkeit des Fluids. $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
Druck. ν Viskosität.

$$\begin{aligned}u_t + u \cdot \nabla u + \nabla p &= \nu \Delta u \\ \nabla \cdot u &= 0.\end{aligned}$$

Anwendung: Design des Flugzeuges, Wetterprognose, 1 Million Dollar Problem, usw.

Vom Bombardier

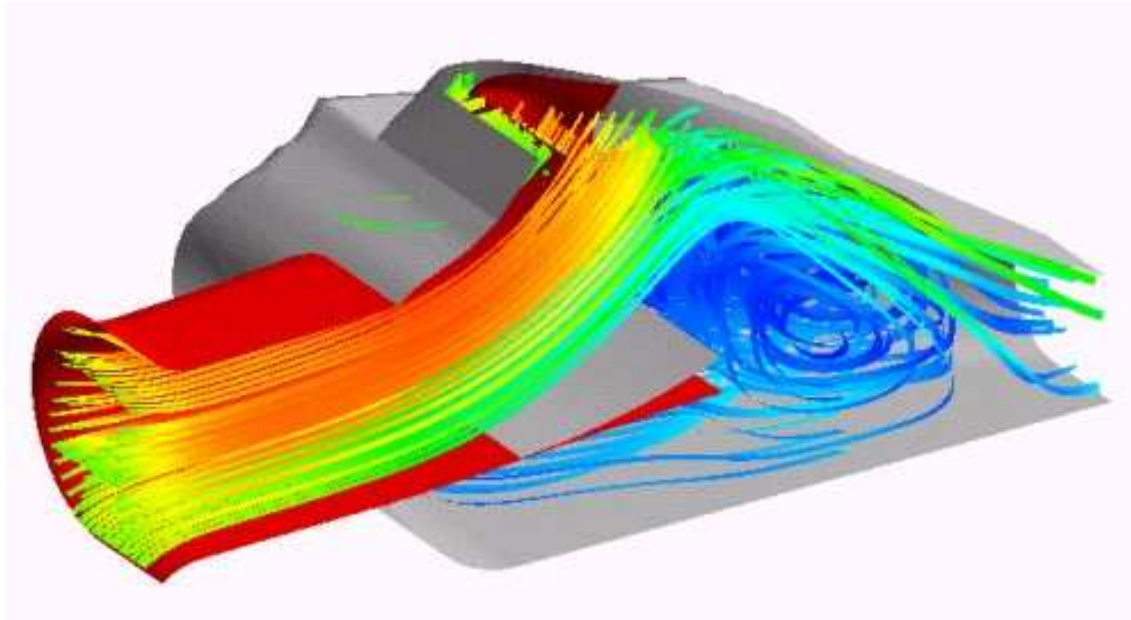


Figure 8: Internal nacelle inlet flow, computed by TASCflow

LANS3D is a 3-D implicit Navier-Stokes code developed by Fujii and Obayashi. LANS3D employs finite differences and the original code uses a LU-ADI solver and the Baldwin-Lomax algebraic turbulence model. In collaboration with Tohoku University in Sendai, Japan, LANS3D has been extended to include multigrid convergence acceleration, Roe's 3rd order upwind differencing scheme for the convective terms, and the Spalart-Allmaras turbulence model. LANS3D was very useful in assessing the effect of large sideslip angles on the aerodynamic side loads on the Dash 8 fuselage, dorsal fin, and vertical tail. Figure 7 shows a view of the computed flowfield on the leeward side of the Dash 8 at 30 degrees of sideslip. The complex flow pattern shows multiple lines of flow separation and attachment. TASCflow, a general-purpose commercial 3-D Navier-Stokes code developed and marketed by AEA Technology, was acquired in 1996. TASCflow employs finite volume discretization and an implicit multigrid solver. It offers many features including conjugate heat transfer, combustion modeling, and rotating and multiple frames of reference. TASCflow has been used at Bombardier Aerospace Toronto primarily for the analysis of propulsion-related configurations. Figure 8 shows a computed solution of the Dash 8-400 nacelle inlet that includes the complex by-pass duct.

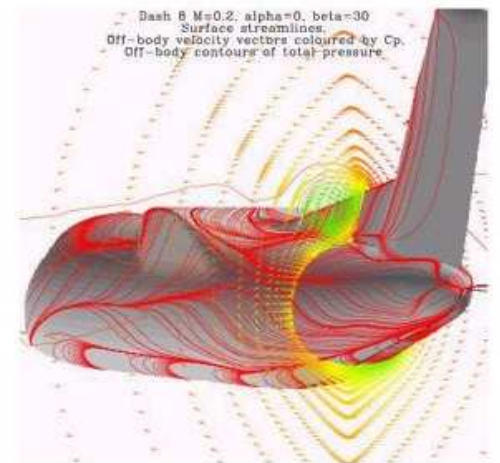


Figure 7: LANS3D computation of the Dash 8 fuselage/fin/dorsal at large sideslip angles