Die Navier-Stokes Gleichung

Harry Schmidt, Sebastian Suter

Mathematisches Institut der Universität Basel

11. November 2009

Die Strömungslehre befasst sich mit dem physikalischen Verhalten von Fluiden. Fluide sind Medien, welche sich unter Einfluss von Scherspannungen unbegrenzt verformen.

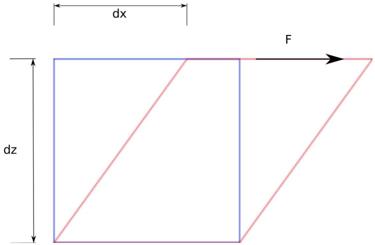


Abbildung: Scherspannung

Die Strömungslehre befasst sich mit dem physikalischen Verhalten von Fluiden. Fluide sind Medien, welche sich unter Einfluss von Scherspannungen unbegrenzt verformen.

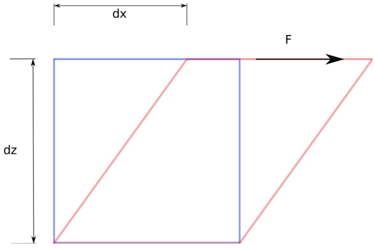


Abbildung: Scherspannung

In dieser Abbildung ist $\tau = F/l$. In $\mathbb{R}^3$ werden die Scherspannungen als Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{i,j}\ e_i \otimes e_j$ dargestellt.

Die Strömungslehre lässt sich in folgende Teilgebiete unterteilen:

Layout

Fluidstatik befasst sich mit dem physikalischen Verhalten ruhender Fluide.

Fluidstatik befasst sich mit dem physikalischen Verhalten ruhender Fluide.

- barometrische Höhenformel

Fluidstatik befasst sich mit dem physikalischen Verhalten ruhender Fluide.

- barometrische Höhenformel
- kinetische Gastheorie

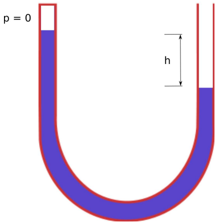
Fluidstatik befasst sich mit dem physikalischen Verhalten ruhender Fluide.

- barometrische Höhenformel
- kinetische Gastheorie
- hydrostatischer Auftrieb

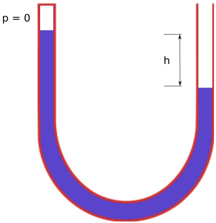
Fluidstatik befasst sich mit dem physikalischen Verhalten ruhender Fluide.

- barometrische Höhenformel
- kinetische Gastheorie
- hydrostatischer Auftrieb
- Schwimmstabilität von Körpern

Mit Hilfe des hier gezeigten U-Rohr Barometers lässt sich der Atmosphärendruck bestimmen. Hier ist $p_{at} = \rho g h$



Mit Hilfe des hier gezeigten U-Rohr Barometers lässt sich der Atmosphärendruck bestimmen. Hier ist $p_{at} = \rho g h$



Die barometrische Höhenformel lässt sich aus der hydrostatischen Grundgleichung herleiten.

$\int_{p(h0)}^{p(h1)} \frac{dp}{p} = \int_{h0}^{h1} \frac{Mg}{RT} dh$

$\Rightarrow p(h_1) = p(h_0) e^{\frac{Mg}{RT} \Delta h}$

Die barometrische Höhenformel lässt sich auch aus der statistischen Mechanik herleiten.
Dazu wird die Bolzmann-Verteilung verwendet.

$$P_j = Z^{-1} e^{-\frac{E_j}{k_B T}}$$

Die barometrische Höhenformel lässt sich auch aus der statistischen Mechanik herleiten.
Dazu wird die Bolzmann-Verteilung verwendet.

$$P_j = Z^{-1} e^{-\frac{E_j}{k_B T}}$$

$$\frac{P(h_1)}{P(h_0)} = e^{-\frac{\Delta E_{pot}}{k_B T}}$$

Die barometrische Höhenformel lässt sich auch aus der statistischen Mechanik herleiten.
Dazu wird die Bolzmann-Verteilung verwendet.

$$P_j = Z^{-1} e^{-\frac{E_j}{k_B T}}$$

$$\frac{P(h_1)}{P(h_0)} = e^{-\frac{\Delta E_{pot}}{k_B T}}$$

$$\Rightarrow \frac{n(h_1)}{n(h_1)} = \frac{NP(h_1)}{NP(h_1)}, n >> 1$$

Die barometrische Höhenformel lässt sich auch aus der statistischen Mechanik herleiten.
Dazu wird die Bolzmann-Verteilung verwendet.

$$P_j = Z^{-1} e^{-\frac{E_j}{k_B T}}$$

$$\frac{P(h_1)}{P(h_0)} = e^{-\frac{\Delta E_{pot}}{k_B T}}$$

$$\Rightarrow \frac{n(h_1)}{n(h_1)} = \frac{NP(h_1)}{NP(h_1)}, n >> 1$$

$$\frac{p(h_1)}{p(h_0)} = e^{-\frac{\Delta E_{pot}}{k_B T}} = e^{-\frac{mg\Delta h}{k_B T}} = e^{-\frac{Mg\Delta h}{RT}}$$

Die barometrische Höhenformel lässt sich auch aus der statistischen Mechanik herleiten.
Dazu wird die Bolzmann-Verteilung verwendet.

$$P_j = Z^{-1} e^{-\frac{E_j}{k_B T}}$$

$$\frac{P(h_1)}{P(h_0)} = e^{-\frac{\Delta E_{pot}}{k_B T}}$$

$$\Rightarrow \frac{n(h_1)}{n(h_1)} = \frac{NP(h_1)}{NP(h_1)}, n >> 1$$

$$\frac{p(h_1)}{p(h_0)} = e^{-\frac{\Delta E_{pot}}{k_B T}} = e^{-\frac{mg\Delta h}{k_B T}} = e^{-\frac{Mg\Delta h}{RT}}$$

Im letzten Schritt wird das ideale Gasgesetz verwendet $p(h) = n(h)k_B T$

Der hydrostatische Auftrieb wurde bekannterweise von Archimedes benutzt um die Reinheit einer Goldenen Krone zu bestimmen. Das Archimedische Prinzip lautet:

Der hydrostatische Auftrieb wurde bekannterweise von Archimedes benutzt um die Reinheit einer Goldenen Krone zu bestimmen. Das Archimedische Prinzip lautet:

Ein Körper, der teilweise oder vollständig in ein Medium eingetaucht ist, erfährt eine Auftriebskraft, deren Betrag gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit ist.

Im Schiffsbau ist die Schwimmstabilität eine wichtige Grösse, sie lässt sich über die Auftriebskräfte des Körpers berechnen.

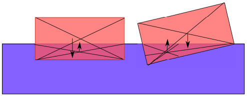


Abbildung: schwimmender Körper

Im Schiffsbau ist die Schwimmstabilität eine wichtige Grösse, sie lässt sich über die Auftriebskräfte des Körpers berechnen.

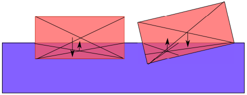


Abbildung: schwimmender Körper

Abbildung: gekentertes Schiff

Layout

Fluiddynamik beschäftigt sich mit dem physikalischen Verhalten von dynamischen Fluiden. Aus den verschiedenen Strömungsarten lassen sich unterschiedliche Anwendungsfälle ableiten.

Fluiddynamik beschäftigt sich mit dem physikalischen Verhalten von dynamischen Fluiden. Aus den verschiedenen Strömungsarten lassen sich unterschiedliche Anwendungsfälle ableiten.

- inkompressibele / kompressibele Strömung

Fluiddynamik beschäftigt sich mit dem physikalischen Verhalten von dynamischen Fluiden. Aus den verschiedenen Strömungsarten lassen sich unterschiedliche Anwendungsfälle ableiten.

- inkompressibele / kompressibele Strömung
- stationäre / nicht stationäre Strömung

Fluiddynamik beschäftigt sich mit dem physikalischen Verhalten von dynamischen Fluiden. Aus den verschiedenen Strömungsarten lassen sich unterschiedliche Anwendungsfälle ableiten.

- inkompressibele / kompressibele Strömung
- stationäre / nicht stationäre Strömung
- reibungsfreie / viskose Strömung

Fluiddynamik beschäftigt sich mit dem physikalischen Verhalten von dynamischen Fluiden. Aus den verschiedenen Strömungsarten lassen sich unterschiedliche Anwendungsfälle ableiten.

- inkompressibele / kompressibele Strömung
- stationäre / nicht stationäre Strömung
- reibungsfreie / viskose Strömung
- laminare / turbulente Strömung

Fluiddynamik beschäftigt sich mit dem physikalischen Verhalten von dynamischen Fluiden. Aus den verschiedenen Strömungsarten lassen sich unterschiedliche Anwendungsfälle ableiten.

- inkompressibele / kompressibele Strömung
- stationäre / nicht stationäre Strömung
- reibungsfreie / viskose Strömung
- laminare / turbulente Strömung
- Art des Leiters

Das physikalische Verhalten inkompressibler, stationärer, reibungsfreier und nicht turbulenter Strömungen wurde durch die Physiker Bernoulli und Venturi beschrieben.

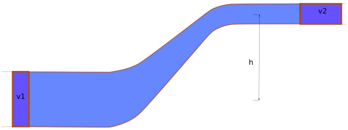


Abbildung: Flüssigkeit in einer Röhre

Das physikalische Verhalten inkompressibler, stationärer, reibungsfreier und nicht turbulenter Strömungen wurde durch die Physiker Bernoulli und Venturi beschrieben.

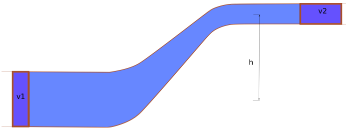


Abbildung: Flüssigkeit in einer Röhre

Die Bernoulli-Gleichung besagt, dass die folgende Kombination von Grössen für jeden Punkt entlang der Röhre den gleichen Wert hat.

$$\frac{1}{2}v^2 + \Phi = const.$$

Das physikalische Verhalten inkompressibler, stationärer, reibungsfreier und nicht turbulenter Strömungen wurde durch die Physiker Bernoulli und Venturi beschrieben.

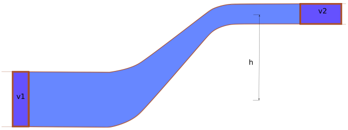


Abbildung: Flüssigkeit in einer Röhre

Die Bernoulli-Gleichung besagt, dass die folgende Kombination von Grössen für jeden Punkt entlang der Röhre den gleichen Wert hat.

$$\frac{1}{2}v^2 + \Phi = const.$$

Dieses Gesetz lässt sich auch aus der Navier-Stokes Gleichung ableiten.

Abbildung: Claude Louis Marie Henri Navier

Abbildung: Claude Louis Marie Henri Navier

Geboren 1785 in Dijon,

Ingenieurstudium an der École Polytechnique, Freundschaft mit seinem Lehrer Fourier. Studium und Lehre an der "École des Ponts et Chaussées". Betont die Bedeutung der Mathematik und Physik für das Ingenieurstudium. Arbeiten u.a. über Flüssigkeiten, Eisenbahn, Konstruktion von Hängebrücken. Gestorben 1836 Paris.

Abbildung: George Gabriel Stokes

Abbildung: George Gabriel Stokes

Geboren 1819 in Skreen, Irland in ärmlichen Verhältnissen. Vater und alle Brüder Pfarrer, Mutter Pfarrerstochter, mit 18 J. Studium an der Universität Cambridge mit 23 J. Ön the steady motion of incompressible fluids", mit 30 J. "Lucasian Professorïn Cambridge. Übt grossen Einfluss auf Maxwell aus. Gestorben 1903 in Cambridge.

Mit Hilfe einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung, der Navier-Stokes-Gleichung lässt sich die ganze Vielfalt der Dynamik von Flüssigkeiten zusammenfassen.

Mit Hilfe einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung, der Navier-Stokes-Gleichung lässt sich die ganze Vielfalt der Dynamik von Flüssigkeiten zusammenfassen.

$$\rho(u_t + (u, \nabla)u) = \eta \triangle u - \nabla p + f \tag{1}$$

Mit Hilfe einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung, der Navier-Stokes-Gleichung lässt sich die ganze Vielfalt der Dynamik von Flüssigkeiten zusammenfassen.

$$\rho(u_t + (u, \nabla)u) = \eta \triangle u - \nabla p + f \tag{1}$$

$$(\nabla, u) = 0 \tag{2}$$

Mit Hilfe einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung, der Navier-Stokes-Gleichung lässt sich die ganze Vielfalt der Dynamik von Flüssigkeiten zusammenfassen.

$$\rho(u_t + (u, \nabla)u) = \eta \triangle u - \nabla p + f \tag{1}$$

$$(\nabla, u) = 0 \tag{2}$$

Hier ist $u(t, \mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld und $p(t, \mathbf{x}), t \geq 0, \mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ der skalare Druck. Dabei bezeichnet $\eta > 0$ die Viskosität, $\rho > 0$ die Dichte und $f(t, \mathbf{x})$ das äussere Kraftfeld. Gesucht sind nun die Lösungen von (1), welche der Inkompressibilitätsbedingung (2) genügen.

Mit Hilfe einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung, der Navier-Stokes-Gleichung lässt sich die ganze Vielfalt der Dynamik von Flüssigkeiten zusammenfassen.

$$\rho(u_t + (u, \nabla)u) = \eta \triangle u - \nabla p + f \tag{1}$$

$$(\nabla, u) = 0 \tag{2}$$

Hier ist $u(t, \mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld und $p(t, \mathbf{x}), t \geq 0, \mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ der skalare Druck. Dabei bezeichnet $\eta > 0$ die Viskosität, $\rho > 0$ die Dichte und $f(t, \mathbf{x})$ das äussere Kraftfeld.
Gesucht sind nun die Lösungen von (1), welche der Inkompressibilitätsbedingung (2) genügen.
Der Druck kann aus der Navier-Stokes-Gleichung durch $u(t, x)$ und $f(t, x)$ eliminiert werden.

Mit Hilfe einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung, der Navier-Stokes-Gleichung lässt sich die ganze Vielfalt der Dynamik von Flüssigkeiten zusammenfassen.

$$\rho(u_t + (u, \nabla)u) = \eta \triangle u - \nabla p + f \tag{1}$$

$$(\nabla, u) = 0 \tag{2}$$

Hier ist $u(t, \mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld und $p(t, \mathbf{x}), t \geq 0, \mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ der skalare Druck. Dabei bezeichnet $\eta > 0$ die Viskosität, $\rho > 0$ die Dichte und $f(t, \mathbf{x})$ das äussere Kraftfeld.
Gesucht sind nun die Lösungen von (1), welche der Inkompressibilitätsbedingung (2) genügen.
Der Druck kann aus der Navier-Stokes-Gleichung durch $u(t, x)$ und $f(t, x)$ eliminiert werden.
Die Gleichungen (1),(2) beschreiben inkompressible Flüssigkeiten mathematisch vollständig. Somit ist die Navier-Stokes-Gleichung die fundamentale Gleichung der Hydrodynamik.

Layout

Für die Herleitung der Gleichung werden zwei Sätze verwendet. Der Gauss'sche Integralsatz und das Transporttheorem.
Der Gauss'sche Integralsatz lautet: $g \in C^1(v, \mathbb{R}^3), V \in \mathbb{R}^3$ mit stkw. glattem Rand n ist der Normalenvektor.

Für die Herleitung der Gleichung werden zwei Sätze verwendet. Der Gauss'sche Integralsatz und das Transporttheorem.
Der Gauss'sche Integralsatz lautet: $g \in C^1(v, \mathbb{R}^3)$, $V \in \mathbb{R}^3$ mit stkw. glattem Rand n ist der Normalenvektor.

$$\int_V div\, \mathbf{g}\, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \langle \mathbf{g}, \mathbf{n} \rangle \tag{3}$$

Das Transporttheorem lautet: $h : \Omega \times [0, \infty] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf Ω. Und $\mathbf{u}$ ist immer das Vektorfeld $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Für die Herleitung der Gleichung werden zwei Sätze verwendet. Der Gauss'sche Integralsatz und das Transporttheorem.
Der Gauss'sche Integralsatz lautet: $g \in C^1(v, \mathbb{R}^3)$, $V \in \mathbb{R}^3$ mit stkw. glattem Rand n ist der Normalenvektor.

$$\int_V div\, \mathbf{g}\, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \langle \mathbf{g}, \mathbf{n} \rangle \tag{3}$$

Das Transporttheorem lautet: $h : \Omega \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf Ω. Und $\mathbf{u}$ ist immer das Vektorfeld $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega h(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial t} + div(h\mathbf{u}) \right) (\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} \tag{4}$$

Aus physikalischer Sicht wird die Erhaltung von Masse und Bewegungsgrösse gefordert. Durch die Massenerhaltung erhält man die Kontinuitätsgleichung $div\mathbf{u} = 0$. Die Massenerhaltung lautet:

Aus physikalischer Sicht wird die Erhaltung von Masse und Bewegungsgrösse gefordert. Durch die Massenerhaltung erhält man die Kontinuitätsgleichung $div\mathbf{u} = 0$. Die Massenerhaltung lautet:

$$\int_\Omega \rho(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = const \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Aus physikalischer Sicht wird die Erhaltung von Masse und Bewegungsgrösse gefordert. Durch die Massenerhaltung erhält man die Kontinuitätsgleichung $div\mathbf{u} = 0$. Die Massenerhaltung lautet:

$$\int_\Omega \rho(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = const \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Durch Massenerhaltung und Transporttheorem folgt $0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{u})$ in $\Omega \times [0, \infty)$.

Aus physikalischer Sicht wird die Erhaltung von Masse und Bewegungsgrösse gefordert. Durch die Massenerhaltung erhält man die Kontinuitätsgleichung $div\mathbf{u} = 0$. Die Massenerhaltung lautet:

$$\int_\Omega \rho(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = const \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Durch Massenerhaltung und Transporttheorem folgt $0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{u})$ in $\Omega \times [0, \infty)$.
Die Impulserhaltung lautet:

Aus physikalischer Sicht wird die Erhaltung von Masse und Bewegungsgrösse gefordert. Durch die Massenerhaltung erhält man die Kontinuitätsgleichung $div\mathbf{u} = 0$. Die Massenerhaltung lautet:

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = const \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Durch Massenerhaltung und Transporttheorem folgt $0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u})$ in $\Omega \times [0, \infty)$.
Die Impulserhaltung lautet:

$$\mathbf{m}(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}$$

Mit Hilfe der Impulserhaltung lässt sich nun das zweite Newton'sche Axiom formulieren

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \mathbf{F}_{tot}$$

Mit Hilfe der Impulserhaltung lässt sich nun das zweite Newton'sche Axiom formulieren

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \mathbf{F}_{tot}$$

Diese Kräfte lassen sich in Volumenkräfte

Mit Hilfe der Impulserhaltung lässt sich nun das zweite Newton'sche Axiom formulieren

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \mathbf{F}_{tot}$$

Diese Kräfte lassen sich in Volumenkräfte

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}$$

Mit Hilfe der Impulserhaltung lässt sich nun das zweite Newton'sche Axiom formulieren

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \mathbf{F}_{tot}$$

Diese Kräfte lassen sich in Volumenkräfte

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}$$

und Oberflächenkräfte

Mit Hilfe der Impulserhaltung lässt sich nun das zweite Newton'sche Axiom formulieren

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \mathbf{F}_{tot}$$

Diese Kräfte lassen sich in Volumenkräfte

$$\int_\Omega \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}$$

und Oberflächenkräfte

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)\, ds$$

aufteilen.

Somit kann nun die Impulserhaltung durch Volumen- und Oberflächenkräfte dargestellt werden.

Somit kann nun die Impulserhaltung durch Volumen- und Oberflächenkräfte dargestellt werden.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds \tag{5}$$

Somit kann nun die Impulserhaltung durch Volumen- und Oberflächenkräfte dargestellt werden.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds \tag{5}$$

Nun wird das Transporttheorem komponentenweise auf die linke Seite der obigen Gleichung angewandt.

Somit kann nun die Impulserhaltung durch Volumen- und Oberflächenkräfte dargestellt werden.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds \tag{5}$$

Nun wird das Transporttheorem komponentenweise auf die linke Seite der obigen Gleichung angewandt.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho u_i \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + div(\rho u_i \mathbf{u}) \right) (\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}$$

Durch die Anwendung des Gauss'schen Integralsatz auf die rechte Seite von (5) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \int_\Omega \rho \mathbf{f}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega div \boldsymbol{\sigma}\, d\mathbf{x}$$

Durch die Anwendung des Gauss'schen Integralsatz auf die rechte Seite von (5) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \int_\Omega \rho\mathbf{f}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega div\boldsymbol{\sigma}\, d\mathbf{x}$$

Nun werden alle Integrationen über das Gebiet Ω ausgeführt, und da der Gauss'sche Integralsatz sowie das Transporttheorem für alle $W \subset \Omega$ gelten erhalten wir die starke Form.

Durch die Anwendung des Gauss'schen Integralsatz auf die rechte Seite von (5) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \int_\Omega \rho \mathbf{f}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega div\boldsymbol{\sigma}\, d\mathbf{x}$$

Nun werden alle Integrationen über das Gebiet Ω ausgeführt, und da der Gauss'sche Integralsatz sowie das Transporttheorem für alle $W \subset \Omega$ gelten erhalten wir die starke Form.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + (div(\rho u_i \mathbf{u}))_{i=1:3} = \rho \mathbf{f} + div\boldsymbol{\sigma} \tag{6}$$

Durch die Anwendung des Gauss'schen Integralsatz auf die rechte Seite von (5) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \int_{\Omega} \rho\mathbf{f}\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} div\boldsymbol{\sigma}\, d\mathbf{x}$$

Nun werden alle Integrationen über das Gebiet Ω ausgeführt, und da der Gauss'sche Integralsatz sowie das Transporttheorem für alle $W \subset \Omega$ gelten erhalten wir die starke Form.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + (div(\rho u_i \mathbf{u}))_{i=1:3} = \rho\mathbf{f} + div\boldsymbol{\sigma} \tag{6}$$

Wird ein homogenes inkompressibles ($\rho = const$) Fluid vorausgesetzt, lässt sich (6) vereinfachen

Durch die Anwendung des Gauss'schen Integralsatz auf die rechte Seite von (5) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(t) = \int_\Omega \rho \mathbf{f}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega div\boldsymbol{\sigma}\, d\mathbf{x}$$

Nun werden alle Integrationen über das Gebiet Ω ausgeführt, und da der Gauss'sche Integralsatz sowie das Transporttheorem für alle $W \subset \Omega$ gelten erhalten wir die starke Form.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + (div(\rho u_i \mathbf{u}))_{i=1:3} = \rho\mathbf{f} + div\boldsymbol{\sigma} \tag{6}$$

Wird ein homogenes inkompressibles ($\rho = const$) Fluid vorausgesetzt, lässt sich (6) vereinfachen

$$(div(\rho u_i \mathbf{u})) = \rho div(u_i\mathbf{u}) = \rho(\nabla u_i \cdot \mathbf{u} + u_i(div\mathbf{u})) = \rho \nabla u_i \cdot \mathbf{u}$$

Daraus ergibt sich der Konvektionsterm:

Daraus ergibt sich der Konvektionsterm:

$$(div(\rho u_i \mathbf{u}))_{i=1:3} = \rho \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 \end{pmatrix} = \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{7}$$

Daraus ergibt sich der Konvektionsterm:

$$(div(\rho u_i \mathbf{u}))_{i=1:3} = \rho \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 \end{pmatrix} = \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{7}$$

Ist das Fluid viskos muss ein Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ eingeführt werden.

Daraus ergibt sich der Konvektionsterm:

$$(div(\rho u_i \mathbf{u}))_{i=1:3} = \rho \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 \end{pmatrix} = \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{7}$$

Ist das Fluid viskos muss ein Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ eingeführt werden.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$$

Daraus ergibt sich der Konvektionsterm:

$$(div(\rho u_i \mathbf{u}))_{i=1:3} = \rho \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 \end{pmatrix} = \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{7}$$

Ist das Fluid viskos muss ein Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ eingeführt werden.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$$

Dabei ist $\mathbf{I} := (\delta_{ij})_{i,j=1:3}$ der Einheitstensor.

Daraus ergibt sich der Konvektionsterm:

$$(div(\rho u_i \mathbf{u}))_{i=1:3} = \rho \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 \end{pmatrix} = \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{7}$$

Ist das Fluid viskos muss ein Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ eingeführt werden.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$$

Dabei ist $\mathbf{I} := (\delta_{ij})_{i,j=1:3}$ der Einheitstensor.
Für Newton'sche Fluide, muss $\boldsymbol{\tau}$ folgende Forderungen erfüllen:

Daraus ergibt sich der Konvektionsterm:

$$(div(\rho u_i \mathbf{u}))_{i=1:3} = \rho \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 \end{pmatrix} = \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{7}$$

Ist das Fluid viskos muss ein Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ eingeführt werden.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$$

Dabei ist $\mathbf{I} := (\delta_{ij})_{i,j=1:3}$ der Einheitstensor.
Für Newton'sche Fluide, muss $\boldsymbol{\tau}$ folgende Forderungen erfüllen:

- $\boldsymbol{\tau}$ hängt nur vom Gradienten der Geschwindigkeit ab, der Zusammenhang ist linear.

Daraus ergibt sich der Konvektionsterm:

$$(div(\rho u_i \mathbf{u}))_{i=1:3} = \rho \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 \end{pmatrix} = \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{7}$$

Ist das Fluid viskos muss ein Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ eingeführt werden.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$$

Dabei ist $\mathbf{I} := (\delta_{ij})_{i,j=1:3}$ der Einheitstensor.
Für Newton'sche Fluide, muss $\boldsymbol{\tau}$ folgende Forderungen erfüllen:

- $\boldsymbol{\tau}$ hängt nur vom Gradienten der Geschwindigkeit ab, der Zusammenhang ist linear.
- $\boldsymbol{\tau}$ ist symmetrisch

Daraus ergibt sich der Konvektionsterm:

$$(div(\rho u_i \mathbf{u}))_{i=1:3} = \rho \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 \end{pmatrix} = \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{7}$$

Ist das Fluid viskos muss ein Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ eingeführt werden.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$$

Dabei ist $\mathbf{I} := (\delta_{ij})_{i,j=1:3}$ der Einheitstensor.
Für Newton'sche Fluide, muss $\boldsymbol{\tau}$ folgende Forderungen erfüllen:

- $\boldsymbol{\tau}$ hängt nur vom Gradienten der Geschwindigkeit ab, der Zusammenhang ist linear.
- $\boldsymbol{\tau}$ ist symmetrisch
- $\boldsymbol{\tau}$ ist invariant unter Rotation, d,h. isotrop

Wir verwenden nun den Ansatz:

Wir verwenden nun den Ansatz:

$$\boldsymbol{\tau}(\nabla \mathbf{u}) = \lambda(div\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u})$$

Wir verwenden nun den Ansatz:

$$\boldsymbol{\tau}(\nabla \mathbf{u}) = \lambda(div\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u})$$

dabei bezeichnet

Wir verwenden nun den Ansatz:

$$\boldsymbol{\tau}(\nabla \mathbf{u}) = \lambda(div\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u})$$

dabei bezeichnet

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{i,j=1:3}$$

den Deformationstensor, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ die dynamischen Viskositäten

Für inkompressible Fluide ist $div\mathbf{u} = 0$ damit ergibt sich für den Spannungstensor

Für inkompressible Fluide ist $div\mathbf{u} = 0$ damit ergibt sich für den Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)(\mathbf{x}, t)$$

Für inkompressible Fluide ist $div\mathbf{u} = 0$ damit ergibt sich für den Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)(\mathbf{x}, t)$$

Dann gilt

Für inkompressible Fluide ist $div\mathbf{u} = 0$ damit ergibt sich für den Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)(\mathbf{x}, t)$$

Dann gilt

$$div\boldsymbol{\sigma} = -div(p\mathbf{I}) + div(\mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)) = -\nabla p + \mu(div(\nabla\mathbf{u}) + div(\nabla\mathbf{u})^T)$$

Für inkompressible Fluide ist $div\mathbf{u} = 0$ damit ergibt sich für den Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)(\mathbf{x}, t)$$

Dann gilt

$$div\boldsymbol{\sigma} = -div(p\mathbf{I}) + div(\mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)) = -\nabla p + \mu(div(\nabla\mathbf{u}) + div(\nabla\mathbf{u})^T)$$

schliesslich führt dies zu

Für inkompressible Fluide ist $div\mathbf{u} = 0$ damit ergibt sich für den Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)(\mathbf{x}, t)$$

Dann gilt

$$div\boldsymbol{\sigma} = -div(p\mathbf{I}) + div(\mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)) = -\nabla p + \mu(div(\nabla\mathbf{u}) + div(\nabla\mathbf{u})^T)$$

schliesslich führt dies zu

$$div\boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \mu\triangle\mathbf{u} \tag{8}$$

Für inkompressible Fluide ist $div\mathbf{u} = 0$ damit ergibt sich für den Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)(\mathbf{x}, t)$$

Dann gilt

$$div\boldsymbol{\sigma} = -div(p\mathbf{I}) + div(\mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)) = -\nabla p + \mu(div(\nabla\mathbf{u}) + div(\nabla\mathbf{u})^T)$$

schliesslich führt dies zu

$$div\boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \mu\triangle\mathbf{u} \tag{8}$$

Durch Einsetzen des Konvektionsterms und der obigen Vereinfachung in die starke Formulierung ergibt sich

Für inkompressible Fluide ist $div\mathbf{u} = 0$ damit ergibt sich für den Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)(\mathbf{x}, t)$$

Dann gilt

$$div\boldsymbol{\sigma} = -div(p\mathbf{I}) + div(\mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)) = -\nabla p + \mu(div(\nabla\mathbf{u}) + div(\nabla\mathbf{u})^T)$$

schliesslich führt dies zu

$$div\boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \mu\triangle\mathbf{u} \tag{8}$$

Durch Einsetzen des Konvektionsterms und der obigen Vereinfachung in die starke Formulierung ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) - \mu\triangle\mathbf{u} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \rho\mathbf{f}$$

Da die obigen Gleichungen alle dimensionsbehaftet sind, kann man noch eine Transformation durchführen. Dazu werden folgende Grössen eingeführt:

Da die obigen Gleichungen alle dimensionsbehaftet sind, kann man noch eine Transformation durchführen. Dazu werden folgende Grössen eingeführt:

- L eine charakteristische Länge

Da die obigen Gleichungen alle dimensionsbehaftet sind, kann man noch eine Transformation durchführen. Dazu werden folgende Grössen eingeführt:

- L eine charakteristische Länge
- U eine charakteristische Geschwindigkeit

Da die obigen Gleichungen alle dimensionsbehaftet sind, kann man noch eine Transformation durchführen. Dazu werden folgende Grössen eingeführt:

- L eine charakteristische Länge
- U eine charakteristische Geschwindigkeit
- T eine charakteristische Zeit

Da die obigen Gleichungen alle dimensionsbehaftet sind, kann man noch eine Transformation durchführen. Dazu werden folgende Grössen eingeführt:

- L eine charakteristische Länge
- U eine charakteristische Geschwindigkeit
- T eine charakteristische Zeit

Nun führen wir folgende Variabeltransformation durch:

Da die obigen Gleichungen alle dimensionsbehaftet sind, kann man noch eine Transformation durchführen. Dazu werden folgende Grössen eingeführt:

- L eine charakteristische Länge
- U eine charakteristische Geschwindigkeit
- T eine charakteristische Zeit

Nun führen wir folgende Variabeltransformation durch:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}$$

$$\frac{L}{UT}\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} - \frac{\nu}{UL}\triangle\tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\frac{p}{\rho U^2} = \frac{L}{\rho U^2}\mathbf{f}, \quad div\tilde{\mathbf{u}} = 0$$

Nun sind die Ableitungen nach den neuen Variablen zu verstehen und wir setzen

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad Re = \frac{UL}{\nu}, \quad St = \frac{L}{UT}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \frac{L}{\rho U^2}\tilde{\mathbf{f}}$$

Nun sind die Ableitungen nach den neuen Variablen zu verstehen und wir setzen

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad Re = \frac{UL}{\nu}, \quad St = \frac{L}{UT}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \frac{L}{\rho U^2}\tilde{\mathbf{f}}$$

Daraus erhalten wir die Navier-Stokes-Gleichungen in der dimensionslosen Form:

Nun sind die Ableitungen nach den neuen Variablen zu verstehen und wir setzen

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad Re = \frac{UL}{\nu}, \quad St = \frac{L}{UT}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \frac{L}{\rho U^2}\tilde{\mathbf{f}}$$

Daraus erhalten wir die Navier-Stokes-Gleichungen in der dimensionslosen Form:

$$St\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} - \frac{1}{Re}\triangle\tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}}, \quad div\tilde{\mathbf{u}} = 0$$

Nun sind die Ableitungen nach den neuen Variablen zu verstehen und wir setzen

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad Re = \frac{UL}{\nu}, \quad St = \frac{L}{UT}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \frac{L}{\rho U^2}\tilde{\mathbf{f}}$$

Daraus erhalten wir die Navier-Stokes-Gleichungen in der dimensionslosen Form:

$$St\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} - \frac{1}{Re}\triangle\tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}}, \quad div\tilde{\mathbf{u}} = 0$$

Die Konstante *Re* ist die Reynoldszahl, je grösser *Re* umso turbulenter die Strömung. Die Konstante *St* ist die Strouhalzahl.

Nun sind die Ableitungen nach den neuen Variablen zu verstehen und wir setzen

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad Re = \frac{UL}{\nu}, \quad St = \frac{L}{UT}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \frac{L}{\rho U^2}\tilde{\mathbf{f}}$$

Daraus erhalten wir die Navier-Stokes-Gleichungen in der dimensionslosen Form:

$$St\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} - \frac{1}{Re}\triangle\tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}}, \quad div\tilde{\mathbf{u}} = 0$$

Die Konstante Re ist die Reynoldszahl, je grösser Re umso turbulenter die Strömung. Die Konstante St ist die Strouhalzahl.
Zwei stationäre Strömungen sind ähnlich, wenn ihre Reynodszahlen übereinstimmen, zwei instationäre Strömungen sind ähnlich, wenn sie in Reynoldszahl und Strouhalzahl übereinstimmen.

Layout

Um die schwache Formulierung zu erhalten betrachten wir zuerst das folgende Modellproblem:

Um die schwache Formulierung zu erhalten betrachten wir zuerst das folgende Modellproblem:

$$-\triangle u + \nabla p = f \quad in\,\Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{9}$$

$$div\ u = 0 \quad in\,\Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{10}$$

$$u = 0 \quad auf\ \partial\Omega \tag{11}$$

Um die schwache Formulierung zu erhalten betrachten wir zuerst das folgende Modellproblem:

$$-\triangle u + \nabla p = f \quad in\, \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{9}$$

$$div\ u = 0 \quad in\, \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{10}$$

$$u = 0 \quad auf\ \partial\Omega \tag{11}$$

Das sind die stationären Stokes-Gleichungen in einem 2D Gebiet Ω mit homogenen Dirichlet Bedingungen und der Reynoldszahl 1 in ihrer dimensionslosen Formulierung.

Um die schwache Formulierung zu erhalten betrachten wir zuerst das folgende Modellproblem:

$$-\triangle u + \nabla p = f \quad in\, \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{9}$$

$$div\ u = 0 \quad in\, \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{10}$$

$$u = 0 \quad auf\ \partial\Omega \tag{11}$$

Das sind die stationären Stokes-Gleichungen in einem 2D Gebiet Ω mit homogenen Dirichlet Bedingungen und der Reynoldszahl 1 in ihrer dimensionslosen Formulierung.
Wir führen nun noch den Raum J_O ein.

$$J_0 = \left\{ u \in H_0^1(\Omega)^2 : \ \|div\ u\|_{L^2} = 0 \right\}$$

Nach einer Multiplikation mit einer Testfunktion $V \in J_0$ und partieller Integration bekommen wir aus (9)

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx - \int_\Omega p \, div \, v \, dx = \int_\Omega vf \, dx \quad \forall v \in J_0$$

Nach einer Multiplikation mit einer Testfunktion $V \in J_0$ und partieller Integration bekommen wir aus (9)

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx - \int_\Omega p \, div \, v \, dx = \int_\Omega vf \, dx \quad \forall v \in J_0$$

Hier sind Gleichung (8) und (9) durch den Raum J_0 gegeben. Aus

$$\int_\Omega q \, div \, v \, dx = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega)$$

Nach einer Multiplikation mit einer Testfunktion $V \in J_0$ und partieller Integration bekommen wir aus (9)

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx - \int_\Omega p \, div \, v \, dx = \int_\Omega vf \, dx \quad \forall v \in J_0$$

Hier sind Gleichung (8) und (9) durch den Raum J_0 gegeben. Aus

$$\int_\Omega q \, div \, v \, dx = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega)$$

$\Rightarrow$ (P) Finde $a(u, v) = l(v) \forall v \in J_0$ mit

$$a(u, v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

und $l(v) = \int_\Omega vf \, dx$. Dieses Problem besitzt eine eindeutige Lösung.

Layout

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^2 : \; v = 0 auf \; \partial\Omega \right\}$$

$$Q = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \; \int_\Omega q \, dx = 0 \right\}$$

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx - \int_\Omega p \, div \; v \, dx = \int_\Omega vf \, dx \quad \forall v \in V$$

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^2 : \; v = 0 auf \; \partial\Omega \right\}$$

$$Q = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \; \int_\Omega q \, dx = 0 \right\}$$

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx - \int_\Omega p \, div \, v \, dx = \int_\Omega vf \, dx \quad \forall v \in V$$

Für Gleichung (8) aus dem Modellproblem

$$\int_\Omega q \, div \, v \, dx = 0 \quad \forall q \in Q$$

$$a(u, v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx \quad \forall u, v \in V$$

und

$$a(u, v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx \quad \forall u, v \in V$$

und

$$b(q, v) = -\int_\Omega q \, div \, v \, dx = 0 \quad \forall q \in Q, v \in V$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx \quad \forall u, v \in V$$

und

$$b(q,v) = -\int_\Omega q \, div \, v \, dx = 0 \quad \forall q \in Q, v \in V$$

(P) Finde $(u,p) \in V \times Q$, so dass

$$a(u,v) + b(p,v) = l(v) \quad \forall v \in V \tag{12}$$

$$b(q,u) = 0 \quad q \in Q \tag{13}$$

Layout

Um ein gegebenes Problem in der Strömungsmechanik vollständig beschreiben zu können müssen weitere Anfangs- und Randbedingungen angegeben werden.

Um ein gegebenes Problem in der Strömungsmechanik vollständig beschreiben zu können müssen weitere Anfangs- und Randbedingungen angegeben werden.
Anfangsbedingung:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \ \mathit{in} \ \Omega$$

Um ein gegebenes Problem in der Strömungsmechanik vollständig beschreiben zu können müssen weitere Anfangs- und Randbedingungen angegeben werden.
Anfangsbedingung:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \; \textit{in} \; \Omega$$

Dirichlet-Randbedingung:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_D(\mathbf{x}, t) \; \textit{auf} \; \Gamma_N$$

Um ein gegebenes Problem in der Strömungsmechanik vollständig beschreiben zu können müssen weitere Anfangs- und Randbedingungen angegeben werden.
Anfangsbedingung:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \ \mathit{in} \ \Omega$$

Dirichlet-Randbedingung:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_D(\mathbf{x}, t) \ \mathit{auf} \ \Gamma_N$$

Falls $\mathbf{u}_D = 0$ haftet das Fluid an der Wand des Leiters, dringt nicht in den Leiter ein. Dies nennt man auch "no-slip" Bedingung.

Neumann-Randbedingung:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \; auf \; \Gamma_N$$

Neumann-Randbedingung:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \; auf \; \Gamma_N$$

"free-slip" Bedingung:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0 \; auf \; \Gamma_R$$

Neumann-Randbedingung:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \; auf \; \Gamma_N$$

"free-slip" Bedingung:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0 \; auf \; \Gamma_R$$

Ähnlich wie bei der "no-slip" Bedingung dringt das Fluid nicht in den Leiter ein, jedoch findet eine reibungsfreie Bewegung parallel zur Wand statt.
Periodische Randbedingung:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{linkerEinlass} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{rechterEinlass}$$

Wie bereits erwähnt ist die Navier-Stokes-Gleichung die fundamentale Gleichung der Fluiddynamik, und hat somit Anwendungen in den verschiedensten Teilgebieten der Physik und der Ingenieurswissenschaften. Hier sind noch einige Beispiele, welche die breite Anwendungsmöglichkeiten der Gleichung aufzeigen sollen.

Wie bereits erwähnt ist die Navier-Stokes-Gleichung die fundamentale Gleichung der Fluiddynamik, und hat somit Anwendungen in den verschiedensten Teilgebieten der Physik und der Ingenieurswissenschaften. Hier sind noch einige Beispiele, welche die breite Anwendungsmöglichkeiten der Gleichung aufzeigen sollen.

- Aerodynamik

Wie bereits erwähnt ist die Navier-Stokes-Gleichung die fundamentale Gleichung der Fluiddynamik, und hat somit Anwendungen in den verschiedensten Teilgebieten der Physik und der Ingenieurswissenschaften. Hier sind noch einige Beispiele, welche die breite Anwendungsmöglichkeiten der Gleichung aufzeigen sollen.

- Aerodynamik
- Hydrodynamik

Wie bereits erwähnt ist die Navier-Stokes-Gleichung die fundamentale Gleichung der Fluiddynamik, und hat somit Anwendungen in den verschiedensten Teilgebieten der Physik und der Ingenieurswissenschaften. Hier sind noch einige Beispiele, welche die breite Anwendungsmöglichkeiten der Gleichung aufzeigen sollen.

- Aerodynamik
- Hydrodynamik
- Magnetohydrodynamik

Im Zeitalter immer knapper werdender Ressourcen werden Fahrzeuge mit optimiertem Treibstoffverbrauch immer wichtiger. Dabei ist auch der aerodynamische Widerstand zu beachten.

Im Zeitalter immer knapper werdender Ressourcen werden Fahrzeuge mit optimiertem Treibstoffverbrauch immer wichtiger. Dabei ist auch der aerodynamische Widerstand zu beachten.

Abbildung: Studie

Im Zeitalter immer knapper werdender Ressourcen werden Fahrzeuge mit optimiertem Treibstoffverbrauch immer wichtiger. Dabei ist auch der aerodynamische Widerstand zu beachten.

Abbildung: Studie

Abbildung: Oldtimer

Wie schon bei der Schwimmfähigkeit eines Körpers erwähnt hat die Navier-Stokes-Gleichung auch in der Hydrodynamik Anwendungen.

Wie schon bei der Schwimmfähigkeit eines Körpers erwähnt hat die Navier-Stokes-Gleichung auch in der Hydrodynamik Anwendungen.

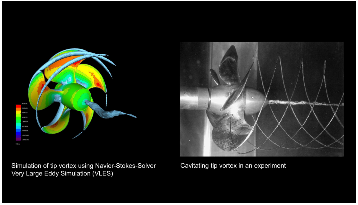


Abbildung: Numerische Simulation und reale Strömung

Wie schon bei der Schwimmfähigkeit eines Körpers erwähnt hat die Navier-Stokes-Gleichung auch in der Hydrodynamik Anwendungen.

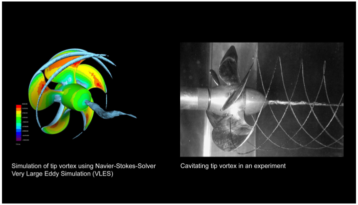


Abbildung: Numerische Simulation und reale Strömung

Abbildung: Americas Cup 2003

Die Magnetohydrodynamik beschäftigt sich mit dem physikalischen Verhalten elektrisch leitender Fluide. Da magnetische Felder Sröme in in bewegten leitenden Flüssigkeiten hervorrufen wird zu deren Beschreibung eine Kombination aus den Navier-Stokes-Gleichungen und den Maxwell'schen Gleichungen verwendet.

Die Magnetohydrodynamik beschäftigt sich mit dem physikalischen Verhalten elektrisch leitender Fluide. Da magnetische Felder Sröme in in bewegten leitenden Flüssigkeiten hervorrufen wird zu deren Beschreibung eine Kombination aus den Navier-Stokes-Gleichungen und den Maxwell'schen Gleichungen verwendet.

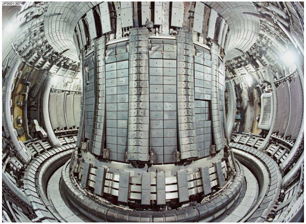


Abbildung: MIT Tokamak reactor

Die Magnetohydrodynamik beschäftigt sich mit dem physikalischen Verhalten elektrisch leitender Fluide. Da magnetische Felder Sröme in in bewegten leitenden Flüssigkeiten hervorrufen wird zu deren Beschreibung eine Kombination aus den Navier-Stokes-Gleichungen und den Maxwell'schen Gleichungen verwendet.

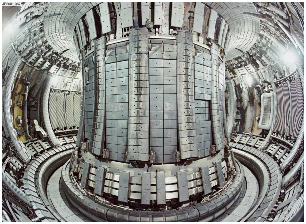


Abbildung: MIT Tokamak reactor

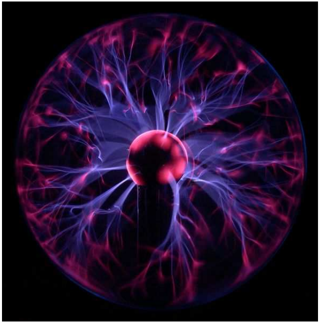


Abbildung: Plasma Kugel