Notationen

Ω	Offene Menge in $\mathbb{R}^n$
$\Gamma = \partial\Omega$	Rand des Gebiets Ω
$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$	Abschluss von Ω
$(x_1, x_2)^T$ oder $(x, y)^T$	Ortsvariable in $\mathbb{R}^2$
t	Zeitvariable
$\lvert\lvert x\rvert\rvert_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \lvert x_j\rvert^2$	Euklidische Norm von einem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$
$\lvert\lvert x\rvert\rvert_\infty = \max_{j=1,\dots,n} \lvert x_j\rvert$	Maximumsnorm von einem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \dot{u}(t)$	Die Zeitableitung einer Funktion $u(t)$
$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = u_x(x,y) = \partial_x u(x,y)$	Eine partielle Ableitung einer Funktion $u(x,y)$
$\frac{\partial}{\partial n}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)n_1 + \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)n_2$	Die Normalenableitung von u in der Richtung $n = (n_1, n_2)$
$\operatorname{grad} u(x,y) = \nabla u(x,y) = (\frac{\partial}{\partial x}u(x,y), \frac{\partial}{\partial y}u(x,y))$	Gradient von $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\Delta = \nabla \cdot \nabla$	Laplace Operator: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ für $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\operatorname{div} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$	Divergenz von $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\operatorname{rot}(F) = \operatorname{curl}(F) = \nabla \times F = \begin{pmatrix} \partial/\partial_x \\ \partial/\partial_y \\ \partial/\partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$	Die Rotation eines Vektorfeldes $F = (F_1, F_2, F_3)$
Dirichlet-Bedingung	u wird am Rand des Gebiets vorgegeben
Neumann-Bedingung	Die Normalableitung $\partial u/\partial n$ wird vorgegeben
Robin-Bedingung	$\partial u/\partial n + au$ wird vorgegeben
Eine PDG $\mathcal{L}u = 0$ heisst	*homogen*
Eine PDG $\mathcal{L}u = g$ mit $g \neq 0$ heisst	*inhomogen*
Eine PDG $\mathcal{L}u = 0$ ist *linear*	falls der Operator $\mathcal{L}$ linear ist: $\mathcal{L}(au + bv) = a\mathcal{L}u + b\mathcal{L}v$
$C^k(\Omega)$	Vektorraum von $k-$stetig differenzierbaren Funktionen
$C_0^k(\Omega)$	Vektorraum von $k-$stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger

$$\begin{aligned}
L^2(\Omega) \qquad & \text{“Raum der quadratintegrablen Funktionen”} \\
(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x \qquad & \text{Skalarprodukt auf } L^2(\Omega) \\
||u||_2^2 = (u,u) \qquad & \text{zugehörige Norm auf } L^2(\Omega) \\
H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\, \forall\, |\alpha| \leq k\} \qquad & \text{Sobolevräume} \\
(u,v)_{H^k} = \sum_{|\alpha|\leq k} (\partial u^\alpha, \partial v^\alpha) \qquad & \text{Skalarprodukt auf } H^k(\Omega) \\
||u||_{H^k}^2 = (u,u)_{H^k} \qquad & \text{zugehörigen Normen auf } H^k(\Omega)
\end{aligned}$$

- Divergenzsatz (oder Integralsatz von Gauss) in $\mathbb{R}^2$: Sei $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glattem (orientiertem) Rand. Sei $f = (f_1, f_2)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf Ω. Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot n \,\mathrm{d}s = \int_\Omega \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x,$$

  wobei $n = (n_1, n_2)$ der Normalenvektor von $\partial\Omega$ und $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ sind.

- Integralformel von Green in $\mathbb{R}^2$: Sei $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glattem Rand. Sei v, w einfach, bzw. zweifach stetig differenzierbare Funktionen auf Ω. Dann gilt

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial n} \,\mathrm{d}s - \int_\Omega v \Delta w \,\mathrm{d}x,$$

  wobei $\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2$ die Normalenableitung von w ist.

- Lemma von Lax-Milgram: Sei V ein Hilbertraum, $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte V-elliptische Bilinearform und $\ell \in V'$. Das Problem

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \text{für alle} \quad v \in V$$

  hat eine eindeutige Lösung.

- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Für $x, y \in V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt, gilt:

$$|(x,y)| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$