Projekt

Das elektromagnetische Feld in einem Mikrowellenherd erfüllt die Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \mathbf{H}_t \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon \mathbf{E}_t + \sigma \mathbf{E} \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

wobei der Vektor **E** das elektrische Feld und der Vektor **H** das magnetische Feld bezeichnen. Die Konstanten ε, σ und μ entsprechen der Permittivität, der elektrischen Leitfähigkeit und der Permeabilität.

In der Luft gelten $\varepsilon_L = 8.85 \cdot 10^{-12}, \sigma_L = 0$ und $\mu_L = 4\pi \cdot 10^{-7}$ und im Fisch $\varepsilon_F = 6.44 \cdot 10^{-10}, \sigma_F = 3 \cdot 10^{-11}$ und $\mu_F = 4\pi \cdot 10^{-7}$.

(1) Wir nehmen an, dass die Lösung zeit-harmonisch ist, d.h.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

mit $\omega = 2\pi 2.45 \cdot 10^9$. Zeigen Sie, dass die Maxwell-Gleichungen äquivalent zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\mathrm{i}\omega\mu \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathrm{i}\omega\tilde{\varepsilon} \mathbf{E} \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

sind. Bestimmen Sie die Konstante $\tilde{\varepsilon}$.

(2) Wir nehmen an, dass $\partial_z \mathbf{E} = \partial_z \mathbf{H} = 0$. Zeigen Sie, dass die dritte Komponente des elektrischen Feldes E_3 die Helmholtz-Gleichung in zwei Raumdimensionen:

$$\Delta E_3 + \omega^2 \mu \tilde{\varepsilon} E_3 = 0 \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

erfüllt. Dazu betrachten Sie die Dirichlet-Randbedingung $E_3(x,y) = g(x,y)$ auf dem Rand $\partial\Omega$.

Wir wollen jetzt das Helmholtz-Problem mit der Finiten-Elemente-Methode lösen!

(3) Zuerst, werden wir ein Gitter erzeugen:

```
function [N,T,P]=Gitter(G,w)
%% Gittererzeuger
% G -> Rechengebiet (G=0,G=1,G=2, oder G=3)
% w -> Frequenz von der Helmholtz-Gleichung
% N -> Liste von Knoten (mit x und y Koordinaten):
% T -> Liste von Dreiecke die richtet nach der Liste N
%      die 3 ersten Eingabe sind die Knoten
%      die 3 naechsten enthalten 0 oder 1:
%      1 falls die Dreieckeskante auf dem Rand des
%      Gebiet liegt, und 0 sonst
% P -> Enthaelt die Material-Konstante mu*epsilon fuer jede Dreieck
```

Diese Funktion erzeugt eine Triangulierung (N,T) von einem Einheitesquadrat (falls G=0), einem Dreieck (falls G=1), einer leeren Mikrowelle (falls G=2), und einem Fisch in der Mikrowelle (falls G=3).

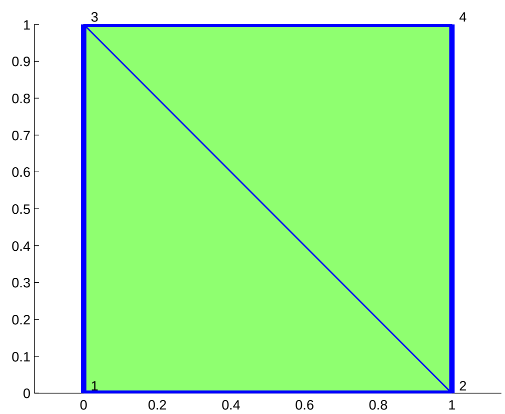
(4) Zur Visualisierung der Triangulierung, benutzt man die folgende Funktion:

```
function PlotGitter(N,T,P)
%% Visualisierung der Triangulierung
% N -> Liste von Knoten
% T -> Liste von Dreiecke
% P -> Enthaelt die Konstante mu*epsilon fuer jede Dreieck
%      mit Farben codiert
%      (in patch, benutzen Sie abs(P(i)) als dritte Komponente)
```

Alle Dreieckeskanten, die auf dem Rand des Rechengebiets liegen, sollen fett gedruckt sein. Für eine kleine Anzahl von Knoten (sagen wir < 100) schreiben Sie auch die dazugehörige Nummer auf den Knoten.

<u>*Hinweis:*</u> *Die Matlab-Funktionen* LINE, PATCH, TEXT, NUM2STR *sind hilfreich.*

Für das Quadrat soll man das folgende Bild bekommen:

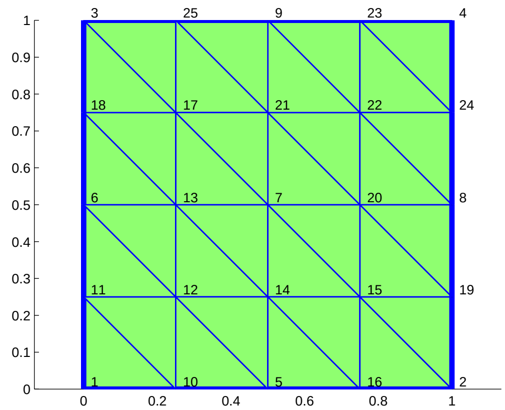


(5) Unser nächstes Ziel ist die Implementierung einer einfachen Gitterverfeinerung. Wir dividieren alle Dreiecken in vier kleinere. Dazu muss man, für jedes Dreieck, drei neuen Knoten einführen (z.B. n4=0.5*(n1+n2)) und damit vier neue Dreiecke definieren.

Bemerkung: Für jedes neue Dreieck müssen die Informationen über die Ränder und die Materialkonstanten gespeichert werden.

```
function [Nr,Tr,Pr]=GitVerfeinerung(N,T,P)
%% einfache Gitterverfeinerung
% Nr, Tr, Pr -> Neuen Knoten, Dreiecken und Material-Konstanten
```

Nach zwei Verfeinerungen bekommen wir:



(6) (*Die Finite-Elemente-Methode*) Wir berechnen zuerst die Elementsteifigkeitsmatrix und die Elementmassenmatrix für das Element *el*:

```
function Ae=Elementsteifigkeitsmatrix(N,T,el)
%% Berechnet die Elementsteifigkeitsmatrix fuer das
%% Element el
```

und

```
function Me=Elementmassenmatrix(N,T,el)
%% Berechnet die Elementmassenmatrix fuer das
%% Element el
% hier muss man bei Hand int_Element phi_i phi_j berechnen
```

(7) Wir können jetzt die Matrizen assemblieren mit Hilfe der folgenden Funktion:

```
function [A, M, b]=AssembHelmoltz2D(g,N,T,P)
%% Assemblierung der Steifigkeitsmatrix A
%% der Massmatrix M und des Lastvektors b
```

(8) Es ist jetzt Zeit ein Löser für die Helmholtz-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen $g(x, y)$ in einem triangulierten Bereich N, T, P zu implementieren:

```
function u=FEHelmholtz2D(g,N,T,w,P)
%% FE Loeser fuer die Helmholtz-Gleichung
% g -> Dirichlet-RB
% w -> Frequenzen fuer die Helmholtz-Gleichung
```

(9) Um die Lösung zu visualisieren, benutzen wir die folgenden Funktionen:

```
function PlotLoesung(u,N,T,P)
%% Plot die Loesung u fuer die
%% Triangulierung N,T
```

und

```
function PlotFisch(u,N,T,P)
%% Plot die Loesung u fuer die
%% Triangulierung N,T
%% Nur auf dem Fisch
```

(10) Testen Sie Ihren Code auf dem Quadrat mit Dirichlet-Randbedingungen $g(x, y) = x + y$ und der Frequenz $\omega = 0$. Wie lautet die exakte Lösung ? Vergleichen Sie die numerische und die exakte Lösung.

(11) Für den Fisch in der Mikrowelle sind die Dirichlet-Randbedingungen gegeben durch

```
g=inline('100*(x==0.5 & 0.1<=y & 0.2>=y)','x','y');
```

Was bedeutet diesen Randbedingungen? Spielen Sie mit dem Code und beschreiben Sie die Lösung.

Hinweis: Ein Skelett den Coden kann man von der Webseite herunterladen.

Bevor Ende Januar 2010, erwarten wir eine kurze Präsentation und ein kleinen Bericht von Ihrem Projekt.

Besprechungstermin: 16.12.09 *während den Übungen.*