Serie 1

zur 39. KW (21.09. - 27.09.2009)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die Funktion $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^a} ,$$

wobei $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ und $a > 0$. Berechnen Sie $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$, ∇u und Δu.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie das Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 + x_3^2\,,\ \mathrm{e}^{-x_1} \sin(x_2 + 2x_3)\,,\ (x_1 + 1)/x_2).$$

Berechnen Sie den Gradient $\nabla\mathbf{v}$ und die Divergenz $\operatorname{div}\mathbf{v}$.

Aufgabe 3:

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $u_{xx}(x) = 0$;

(b) $u_{xx}(x, y) + u(x, y) = 0$;

(c) $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Trennung der Variablen, d.h. schreiben Sie $u(x, t)$ als $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die formale Lösung von

$$V_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$$

ist $V(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta)$, wobei $\phi(\xi)$ und $\psi(\eta)$ beliebige, hinreichend glatte Funktionen sind.

Aufgabe 5:

Betrachten Sie die (eindimensionale) Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}u_t + u_{xx} = \lambda |u|^2 u\,, \quad \lambda > 0\,,$$

mit der periodischen Randbedingung

$$u(0,t) = u(2\pi, t)$$

und der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x)\,.$$

Zeigen Sie, dass $\int_0^{2\pi} |u(x,t)|^2\,dx = 1$ für alle $t > 0$, falls $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = 1$.

Hinweis: Berechnen Sie $\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} |u(x,t)|^2\,dx$ *und beachten Sie dabei, dass* $u(x,t)$ *eine komplexe Funktion ist.*

---

ohne Abgabe

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
`http://www.math.unibas.ch/~cohen`