Serie 2

zur 40. KW (28.09. - 04.10.2009)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= a^2 u_{xx}(x,t)\,, \quad 0 < x < 1\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= f(x)\,, \quad 0 < x < 1\,, \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Lösung sowie mit Hilfe der d'Alembertschen Formel als auch mittels eines Fourierreihenansatzes (Trennung der Variablen). Vergleichen Sie die beiden Lösungen.

Aufgabe 2: (*Energieerhaltung für die Wellengleichung*)

Betrachten Sie die Wellengleichung $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < \ell$, $t > 0$, mit den Randbedingungen $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$. Zeigen Sie, dass für alle $t \geq 0$, $E(t) = E(0)$ gilt, wobei

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(u_t(x,t)^2 + a^2 u_x(x,t)^2\right) \mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= \sigma u_{xx}\,, \quad 0 < x < l\,, \\ u(0,t) &= u(l,t) = T_0\,, \end{aligned}$$

wobei $\sigma \neq 1$ und $T_0 \neq 0$. Für die Transformation

$$\tau = \alpha t\,, \quad \xi = \beta x\,, \quad v = u + \gamma\,,$$

definieren Sie die Konstanten α, β und γ so, dass Sie das Problem

$$\begin{aligned} v_\tau &= v_{\xi\xi}\,, \quad 0 < \xi < \pi\,, \\ v(0,\tau) &= v(\pi,\tau) = 0\,, \end{aligned}$$

bekommen.

Aufgabe 4:

Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t)\,, \quad 0 < x < 1\,,\ t > 0\,,\\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0\,, \quad t > 0\,,\\ u(x,0) &= \cos(\pi x) - 3\cos(3\pi x)\,, \quad 0 < x < 1\,, \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Fourierreihenansatzes (Trennung der Variablen).

Aufgabe 5: (*Regularität der Lösung der Wärmeleitungsgleichung*)

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t)\,, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}\,,\ t > 0\,,\\ u(x,t) &= 0\,, \quad x \in \partial\Omega\,,\ t > 0\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \quad x \in \Omega\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\int_0^T \int_\Omega u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $T \ge 0$;

Hinweis: *Multiplizieren Sie die Gleichung mit der Funktion $u(x,t)$ und integrieren Sie über das Gebiet Ω. Verwenden Sie, dass $u_t u = \frac{1}{2}(u^2)_t$ gilt.*

(b) $\displaystyle\int_\Omega u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2T}\int_\Omega u_0^2(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $T > 0$.

Hinweis: *Multiplizieren Sie die Gleichung mit tu_t und integrieren Sie über das Gebiet Ω. Verwenden Sie, dass $u_{tx}u_x = \frac{1}{2}(u_x^2)_t$ gilt. Zeigen Sie dann, dass*

$$\int_0^T t \int_\Omega (u_x^2)_t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le 0$$

gilt. Anschliessend wenden Sie die Abschätzung aus dem Teil (a) an.

Aufgabe 6: (*Programmieraufgabe*)

Betrachten Sie die eindimensionalen Poisson-Gleichung

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{in} \quad (0,1)\,,$$

wobei $f(x)$ eine gegebene Funktion ist.

(a) Schreiben Sie einen `MATLAB`-Code `Poisson1D.m` zur numerischen Lösung der Gleichung mit den Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0) = a\,, \qquad u(1) = b\,.$$

Dabei sind a und b gegebene Zahlen. Die zweite Ableitung wird durch den zentralen Differenzenquotienten approximiert. Als Testproblem wählen Sie die vorgegebene Lösung

$$u(x) = \frac{1}{4\pi^2}\cos(2\pi x).$$

Plotten Sie die exakte und numerische Lösung für $n \in \{8, 16, 32\}$ inneren Punkte.

<u>*Hinweis:*</u> *Die* `MATLAB`*-Funktion* `spdiags` *ist hilfreich.*

(b) Modifizieren Sie den Code `Poisson1D.m`, so dass der Code die numerischen Lösung der Gleichung mit den Randbedingungen

$$u(0) = a\,, \qquad u'(1) = b$$

auch bestimmt. Die Neumann-Randbedingung $u'(1) = b$ wird durch den zentralen Differenzenquotienten approximiert.

Abgabe: Dienstag, 29. September 2009, bis 15 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`