

Serie 3

zur 41. KW (05.10. - 11.10.2009)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Sind die Funktionen

$$\begin{aligned}u(x, y) &= x \quad \text{in } \Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(x, y) &= 2 \log(x^2 + y^2) \quad \text{in } \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}(0, 1), \\ u(x, y) &= 28 \sin(x) \sinh(y) \quad \text{in } \Omega = (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(x, y) &= 0 \quad \text{in einem beliebigen } \Omega,\end{aligned}$$

Lösungen der Randwertaufgabe? Widerspricht es sich mit dem Satz über die Eindeutigkeit der Lösung?

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega = (0, 1)^2, \\ u &= x^2 \quad \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $u(x, y) \notin C^2(\bar{\Omega})$ gilt, wobei $u(x, y)$ die Lösung der Randwertaufgabe bezeichnet.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $u(x, y) \in C^2(\bar{\Omega})$ gilt. Finden Sie einen Punkt $(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}$ so, dass $\Delta u(x_0, y_0) = 2$.

Aufgabe 3:

Für welchen Werten von $a \in \mathbb{R}$ und x sind die folgenden Gleichungen elliptisch?

- (a) $-4u_{xx} + 2au_{xy} - u_{yy} = 0$;
- (b) $-u_{xx} + 2xu_{xy} - 5u_{yy} = axu_x$.

Aufgabe 4:

Berechnen Sie den Fehler der folgenden Approximationen:

- (a) $u'(x) \approx \frac{1}{2h}(u(x+h) - u(x-h))$;

$$(b) \quad u'(x) \approx \frac{1}{2h}(-3u(x) + 4u(x+h) - u(x+2h));$$

$$(c) \quad u''(x) \approx \frac{1}{12h^2}(-u(x+2h) + 16u(x+h) - 30u(x) + 16u(x-h) - u(x-2h)).$$

Aufgabe 5: (Programmieraufgabe)

Schreiben Sie einen MATLAB-Code `FD_Poisson2D_DR.m` zur Lösung vom Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die rechte Seite und die Randbedingung seien so gewählt, dass

$$u(x,y) = x(1-x)y(1-y)e^{x+y}.$$

die Lösung vom Problem ist. Zur Diskretisierung nehmen Sie den Fünf-Punkte-Finite-Differenzen-Stern. Das Gitter mit N^2 inneren Punkten nummerieren Sie lexikographisch. Die Matrix soll im sparse-Format gespeichert werden.

Für $N = 10, 20, 40, 80$ berechnen Sie den numerischen Fehler bezüglich der Maximumnorm und ploten Sie die numerische bzw. exakte Lösung. Welches Verhalten des Fehlers beobachten Sie für verschiedene Werte von N ?

Hinweis: Ein Skelett des Codes `FD_Poisson2D_DR.m` kann man von der Webseite herunterladen.

Abgabe: Dienstag, 6. Oktober 2009, bis 15 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite <http://www.math.unibas.ch/~cohen>