Serie 4

zur 42. KW (12.10. - 18.10.2009)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \ \Omega = (0,1)^2, \\ u &= g \quad \text{auf } \ \partial\Omega \end{aligned}$$

für die Poisson-Gleichung. Führen Sie die Gitterpunkten (x_i, y_j), $0 \le i, j \le N+1$, mit $x_i = ih$, $y_j = jh$ und $h = 1/(N+1)$ ein. Zur Diskretisierung nehmen Sie den Fünf-Punkte-Finite-Differenzen-Stern. Bestimmen Sie die Matrix A_h und den Vektor b_h vom linearen Gleichungssystem $A_h U = b_h$ für $N = 3$. Bestimmen Sie das Gleichungssystem zuerst mit der lexikographischen Nummerierung und dann mit der Schwarz-Weiss-Nummerierung.

Hinweis: Um das Gitter nach der Schwarz-Weiss-Methode zu nummerieren, definieren wir $\Omega_h^U := \{(x,y) \in \overline{\Omega}_h : (x+y)/h \text{ ist ungerade}\}$ *und* $\Omega_h^G := \{(x,y) \in \overline{\Omega}_h : (x+y)/h \text{ ist gerade}\}$. *Mit der lexikographischen Nummerierung zählen zuerst* Ω_h^G *und dann* Ω_h^U.

Aufgabe 2:

Sei $u_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}$ mit $-\Delta_h u_h(x,y) \le 0$ für alle Punkte $(x,y) \in \Omega_h$, wobei

$$\Delta_h u_h(x,y) := \frac{1}{h^2}\left(u_h(x-h,y) + u_h(x,y-h) - 4u_h(x,y) + u_h(x+h,y) + u_h(x,y+h)\right).$$

Zeigen Sie, dass $u_h(x,y) \le \max_{\partial\Omega} u_h$ für alle Punkte $(x,y) \in \overline{\Omega}_h$ gilt.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \ \Omega = (0,1)^2$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0, \quad u(1,y) = 0 \quad \text{für } \ y \in [0,1], \\ u_y(x,0) &= 0, \quad u_y(x,1) = 0 \quad \text{für } \ x \in (0,1). \end{aligned}$$

Führen Sie die Gitterpunkten (x_i, y_j), $0 \le i, j \le N+1$, mit $x_i = ih$, $y_j = jh$ und $h = 1/(N+1)$ ein. Zur Diskretisierung der Gleichung nehmen Sie den Fünf-Punkte-Finite-Differenzen-Stern. Die Neumann-Randbedingungen approximieren Sie durch den zentralen Differenzenquotienten. Mit der lexikographischen Nummerierung berechnen Sie die Matrix A_h und den Vektor b_h vom linearen Gleichungssystem $A_h U = b_h$ für $N = 3$.

Aufgabe 4: (*Programmieraufgabe*)

Schreiben Sie einem `MATLAB`-Code `FD_Poisson2D_DNR.m` zur Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \;\; \Omega = (1,4) \times (0,2)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(1,y) = 0, \quad u(4,y) = 0 \quad &\text{für} \;\; y \in [0,2], \\ u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,2) = 0 \quad &\text{für} \;\; x \in (1,4). \end{aligned}$$

Zur Diskretisierung der Gleichung nehmen Sie den Fünf-Punkte-Finite-Differenzen-Stern. Die Neumann-Randbedingungen approximieren Sie durch den zentralen Differenzenquotienten. Das Gitter

$$\overline{\Omega}_h := \{(1 + ih_x, jh_y)\,, 0 \leq i,j \leq N+1\,, h_x = 3/(N+1)\,, h_y = 2/(N+1)\}$$

nummerieren Sie lexikographisch. Die Matrix soll im sparse-Format gespeichert werden.

Als Testproblem wählen Sie die vorgegebene Lösung

$$u(x) = \sin(\pi x)\cos(\pi y).$$

Für $N = 10, 20, 40, 80$ berechnen Sie den numerischen Fehler bezüglich der Maximumnorm und ploten Sie die numerische bzw. exakte Lösung. Welches Verhalten des Fehlers beobachten Sie für verschiedene Werte von N?

Hinweis: Ein Skelett des Codes `FD_Poisson2D_DNR.m` *kann man von der Webseite herunterladen.*

Aufgabe 5: (*Diskretes Maximumprinzip*)

Sei $Lu = f$ in $\Omega = (0,1)^2$ mit $f \leq 0$ und $u = g$ auf $\partial\Omega$ ein elliptisches Problem und $L_h U = f_h$ das lineare Gleichungssystem, das aus der Finite-Differenzen-Diskretisierung des Problems herrührt, wobei

$$\begin{aligned} L_h U(z) &:= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k U(z_k) = f(z) =: f_h(z) \quad \text{für alle } z \in \Omega_h\,, \\ L_h U(z) &:= U(z) = g(z) =: f_h(z) \quad \text{für alle } z \in \partial\Omega_h\,. \end{aligned}$$

Der Differenzenstern zu jedem Gitterpunkt $z \in \Omega_h$ genüge folgenden drei Bedingungen:

(i) Alle Koeffizienten α_k, abgesehen von dem Koeffizient des zentralen Punktes, sind nicht positiv;

(ii) Es existiert einen negativen Koeffizient;

(iii) Die Summe aller Koeffizienten $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ ist nicht negativ.

Zeigen Sie, dass $\max_{\Omega_h} U \leq \max(\max_{\partial\Omega_h} U, 0)$ gilt.

<u>*Hinweis:*</u> *Beachten Sie, dass die Voraussetzungen (i)-(iii) für den Fünf-Punkte-Stern des Laplace-Operators $L_h U(z) := 4U_Z - U_N - U_S - U_N - U_O$ erfüllt sind.*

<u>Aufgabe 6:</u>

Sei $L_h U = f_h$ das lineare Gleichungssystem, das aus der Finite-Differenzen-Diskretisierung des elliptischen Problems $Lu = f$ in Ω mit $f \leq 0$ herrührt. Der Differenzenstern zur Diskretisierung erfüllt die Voraussetzungen (i)-(iii) des diskreten Maximumprinzips (siehe Aufgabe 5). Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem $L_h U = f_h$ eindeutig lösbar ist.

<u>*Hinweis:*</u> *Betrachten Sie das zugehörige homogene Gleichungssystem $L_h U = \mathbf{0}$ und verwenden Sie das diskrete Maximumprinzip aus der Ausgabe 5.*

Abgabe: Dienstag, 13. Oktober 2009, bis 15 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`