Serie 5

zur 43. KW (19.10. - 25.10.2009)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die elliptische Gleichung

$$-4u_{xx}(x,y) + 2u_{xy}(x,y) - u_{yy}(x,y) = f(x,y) \quad \text{in} \;\; \Omega = (0,1)^2.$$

Führen Sie die Gitterpunkten (x_i, y_j), $0 \leq i, j \leq N+1$, mit $x_i = ih$, $y_j = jh$ und $h = 1/(N+1)$ ein. Zur Diskretisierung verwenden Sie die folgenden Differenzen

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \\ u_{yy}(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}, \\ u_{xy}(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{4h^2}. \end{aligned}$$

Für $N = 3$, bestimmen Sie die Matrix A_h und den Vektor b_h von dem entsprechenden Gleichungssystem $A_h U = b_h$, wobei Sie die folgenden Randbedingungen betrachten:

(a) $u = 0$ auf $\partial\Omega$;

(b) $u(x,0) = 1$, $u(0,y) = 0$ $(y > 0)$,
$u(x,1) = 0$, $u(1,y) = 0$;

(c) $u_y(x,0) = 0$, $u(0,y) = 0$ $(y > 0)$,
$u(x,1) = 0$, $u(1,y) = 0$.
Hinweis: *Die Neumann-Randbedingung approximieren Sie durch den zentralen Differenzenquotienten.*

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4}(x) &= f(x) \quad \text{in } (0,1)\,, \\ u(0) = u(1) &= 0\,, \\ u'(0) = u'(1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Leiten Sie die schwache Formulierung des Problems und das äquivalente Minimierungsproblem her.

Hinweis: *Verwenden Sie den Raum*

$$V := \{v : v, v' \in \mathcal{C}([0,1]),\; v'' \text{ stückweise } \mathcal{C}([0,1]),\; v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}\,.$$

Aufgabe 3:

Betrachten Sie den Raum

$$V := \{v : v \in \mathcal{C}([0,1]),\ v' \text{ stückweise } \mathcal{C}([0,1]) \text{ und beschränkt},\ v(0) = v(1) = 0\}$$

und die Funktion $w \in \mathcal{C}([0,1])$ mit $\int_0^1 w(x)v(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass $w \equiv 0$ in $[0,1]$.

Hinweis: *Nehmen Sie an, dass $w \not\equiv 0$ in $[0,1]$. Betrachten Sie ein Intervall $[x_0, x_1] \subset [0,1]$, in dem es entweder $w(x) > 0$ oder $w(x) < 0$ gilt. Konstruieren Sie eine Funktion $v \in V$ so, dass $\int_0^1 w(x)v(x)\,\mathrm{d}x < 0$ oder $\int_0^1 w(x)v(x)\,\mathrm{d}x > 0$.*

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad \text{in} \quad (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Mit einer Steifigkeitsmatrix A und einem Lastvektor b ist der lineare Galerkinansatz äquivalent zum linearen Gleichungssystem $Ax = b$. Beweisen Sie, dass die Matrix A symmetrisch, positiv definit ist.

Aufgabe 5: (*Programmieraufgabe)*

Betrachten Sie das Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad \text{in} \quad (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Schreiben Sie einen `MATLAB`-Code `Lin_FE_Poisson1D.m` zur numerischen Lösung des Problems mittels stückweise linearen Finiten-Elemente auf einem äquidistanten Gitter mit Maschenweite $h > 0$. Beim Assemblieren der Steifigkeitsmatrix verwenden Sie die Elementsteifigkeitsmatrix zusammen mit dem elementweisen Vorgehen. Der Integralterm zur Berechnung des Lastvektors wird durch eine Quadratur (z.B. Trapez- oder Simpson-Regel) berechnet.

Als Testproblem wählen Sie die vorgegebene Lösung $u(x) = \sin(\pi x)$. Plotten Sie die exakte bzw. numerische Lösung für $h = 0.2, 0.1, 0.05$.

Hinweis: *Ein Skelett des Codes* `Lin_FE_Poisson1D.m` *kann man von der Webseite herunterladen.*

Abgabe: Dienstag, 20. Oktober 2009, bis 15 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
`http://www.math.unibas.ch/~cohen`