Serie 6

zur 44. KW (26.10. - 01.11.2009)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die Helmholtz-Gleichung

$$-u''(x) + ku(x) = f(x) \quad \text{in} \ \ (0,1) \tag{1}$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0) = 0\,, \quad u(1) = 0\,, \tag{2}$$

wobei $k > 0$.

(a) Leiten Sie die schwache Formulierung des Problems (1)-(2) her.

(b) Die lineare Finite-Elemente-Diskretisierung des Problems (1)-(2) ist zum linearen Gleichungssystem $(A + kM) \cdot U = b$ äquivalent. Hier bezeichnet A die Steifigkeitsmatrix, M die Massenmatrix und b den Lastvektor. Berechnen Sie die Massenmatrix M.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Elementmassenmatrix M_i^e auf dem Element $[x_{i-1}, x_i]$. Durch das elementweise Vorgehen assemblieren Sie dann M.

Aufgabe 2: (*Programmieraufgabe*)

Implementieren Sie die numerische Lösung des Problems (1)-(2) mittels stückweise linearen Finiten-Elemente auf einem äquidistanten Gitter mit Maschenweite $h > 0$.

- Um die Steifigkeitsmatrix, die Massenmatrix und den Lastvektor elementweise zu generieren, implementieren Sie die Funktion:

```
function [A, M, b] = Assemb_Lin_FE_1D(x, f)
% A   die Steifigkeitsmatrix
% M   die Massmatrix
% b   der Lastvektor
% x   die Gitterpunkte im [0, 1]
% f   die rechte Seite des Problems
```

  Hinweis: Verwenden Sie Ihren Code zur Aufgabe 5 aus der Serie 5 um die Steifigkeitsmatrix und den Lastvektor zu generieren.

- Schreiben Sie einen `MATLAB`-Code `Lin_FE_Helmholtz1D.m` zum Testen Ihrer Finite-Elemente-Implementierung. Als Testproblem wählen Sie $k = 1$ und die vorgegebene Lösung $u(x) = \sin(\pi x)$. Plotten Sie die exakte bzw. numerische Lösung für $h = 0.2, 0.1, 0.05$.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie den Raum

$$L := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ stückweise stetig und } \int_0^1 |f|^2 < \infty\}$$

und die Folge $\{f_n\}_n$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{j+1} & \text{für } \dfrac{1}{j+1} \le x \le \dfrac{1}{j}\,, j = 1, \dots, n\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\{f_n\}_n$ eine Cauchy-Folge in L ist und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) \notin L$ gilt.

Aufgabe 4:

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 28 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ nicht Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 5:

(a) Betrachten Sie eine Funktion $u \in L^2(\Omega)$ und nehmen Sie an, dass die schwache Ableitung von u existiert. Zeigen Sie, dass die schwache Ableitung von u eindeutig ist.

(b) Betrachten Sie eine Funktion $u \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$. Zeigen Sie, dass die schwache Ableitung von u mit der üblichen Ableitung übereinstimmt.

Aufgabe 6:

Betrachten Sie die Funktionen φ_j, $j = 1, \dots, N$, die eine Basis vom linearen Finiten-Elemente-Raum im eindimensionalen Fall bilden. Zeigen Sie, dass jede Basisfunktion eine schwache erste Ableitung besitzt.

Hinweis: Die Basisfunktionen φ_j, $j = 1, \dots, N$ sind mit

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} 1 - \dfrac{|x - x_j|}{h} & \textit{für } x_{j-1} \le x \le x_{j+1}\,, \\ 0 & \textit{sonst}\,, \end{cases}$$

definiert, wobei wir eine Zerlegung mit konstanter Schrittweite h betrachten.

Abgabe: Dienstag, 27. Oktober 2009, bis 15 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
`http://www.math.unibas.ch/~cohen`