Serie 7

zur 45. KW (02.11. - 08.11.2009)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{für } 0 < x \leq 1\,, \\ 3x^2 - 2x + 1 & \text{für } 1 < x < 3\,. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die erste und zweite schwachen Ableitungen von $u(x)$.

(b) Berechnen Sie die Normen $\|u\|_{H^2}$, $\|u'\|_{H^1}$ und $\|u''\|_{H^0}$.

Aufgabe 2: (*Hilfsatz zum Spursatz*)

Seien V und W normierte Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_V$ bzw. $\|\cdot\|_W$ und $\mathcal{L} : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathcal{L}$ ist stetig;

(ii) $\mathcal{L}$ ist in 0 stetig;

(iii) $\mathcal{L}$ ist beschränkt, d.h. $\|\mathcal{L}v\|_W \leq C\|v\|_V$ für alle $v \in V$ mit einer Konstante $C < \infty$.

Aufgabe 3:

Seien V ein Hilbertraum, $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige V-elliptische Bilinearform und $l(\cdot) : V \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional. Betrachten Sie das Problem:

$$\text{Finde } u \in V, \text{ so dass } a(u,v) = l(v) \text{ für alle } v \in V.$$

Nehmen Sie an, dass das Problem eine Lösung besitzt und zeigen Sie, dass sie eindeutig ist. Zeigen Sie, dass $\|u\|_V \leq C\|\ell\|$ gilt. Hier bezeichnet $\|\ell\|$ die kleinste Konstante so, dass $\|\ell(v)\| \leq \widetilde{C}\|v\|$ für alle $v \in V$ gilt.

Aufgabe 4:

(a) Zeigen Sie, dass die Normen $|\cdot|_{H^1(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}$ und $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ in $H^1_0(\Omega)$ äquivalent sind, d.h. $|u|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C|u|_{H^1(\Omega)}$ für alle $u \in H^1_0(\Omega)$.
<u>*Hinweis:*</u> *Verwenden Sie die Poincaré-Friedrische Ungleichung.*

(b) Zeigen Sie, dass die Normen $|\cdot|_{H^2(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}$ und $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ in $H^2_0(\Omega)$ äquivalent sind.

Bemerkung: Im Allgemeinen gilt es, dass die Normen $|\cdot|_{H^m(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ in $H^m_0(\Omega)$ $(m \geq 1)$ äquivalent sind.

Aufgabe 5:

Betrachten Sie die Randwertaufgabe

$$-\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) = f(x) \quad \text{in } (0,1)\,,$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

mit $p(x) \in \mathcal{C}^1(0,1)$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \in \mathcal{C}(0,1)$, $q(x) \geq 0$, $f(x) \in \mathcal{C}^2(0,1)$ und $u \in H^2(0,1)$.

(a) Leiten Sie die schwache Formulierung des Problems und zeigen Sie, dass sie eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: *Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen vom Lax-Milgram-Lemma erfüllt sind. Um die V-Elliptizität der Bilinearform zu beweisen, verwenden Sie die Äquivalenz der Normen in $H_0^1(\Omega)$ (siehe Aufgabe 4).*

(b) Zeigen Sie, dass $\|u\|_{H^1(0,1)} \leq C_1 \|f\|_{L^2(0,1)}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\|u''\|_{L^2(0,1)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(0,1)}$ gilt.

Hinweis: *Zuerst zeigen Sie, dass*

$$\int_0^1 p(x)(u''(x))^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 q(x)u(x)u''(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 p'(x)u'(x)u''(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)u''(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt. Schätzen Sie dann die Ausdrücke in der rechten Seite einzeln ab. Abschließend verwenden Sie die Abschätzung aus der Teilaufgabe (b).

Aufgabe 6: (*fakultativ*)

Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \ :\ |x| < 1\}$ und $u(x) = \ln\ln\left(\frac{\mathrm{e}}{|x|}\right)$ für alle $x \in \Omega\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass $u \in H_0^1(\Omega)$.

Hinweis:

- *Um $u \in L^2(\Omega)$ zu beweisen, verwenden Sie Polarkoordinaten und zeigen Sie, dass*

$$\lim_{r\to 0} r\left(\ln\ln\left(\frac{\mathrm{e}}{r}\right)\right)^2 = 0\,.$$

- *Um die Existenz der ersten schwachen Ableitungen von u zu beweisen, verwenden Sie die Greensche Formel*

$$-\int_{\Omega\backslash B_\varepsilon(0)} \nabla u \cdot \varphi\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega\backslash B_\varepsilon(0)} u \ \mathit{div}\varphi\,\mathrm{d}x - \int_{\partial(\Omega\backslash B_\varepsilon(0))} u\,\varphi\cdot n\,\mathrm{d}s\,,$$

wobei $B_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ :\ |x| < \varepsilon\}$.

Abgabe: Dienstag, 3. November 2009, bis 15 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
`http://www.math.unibas.ch/~cohen`