Serie 8

zur 46. KW (09.11. - 15.11.2009)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die affine Abbildung

$$
\begin{aligned}
F_T : \widehat{T} &\longrightarrow T\,,\\
\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{P_0} + (\underline{P_1} - \underline{P_0})\xi + (\underline{P_2} - \underline{P_0})\eta\,,
\end{aligned}
$$

die das Referenzdreieck $\widehat{T}$ auf das Element T mit den Eckpunkten P_0, P_1 und P_2 abbildet, siehe Abb. 1. Hier bezeichnet $\underline{P_i} \in \mathbb{R}^2$ die Koordinaten des Punktes P_i, $i = 0, 1, 2$. Bezeichnen Sie die Hypotenuse von $\widehat{T}$ mit $\partial\widehat{T}$. Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{\partial T} v^2\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe vom Integral über $\partial\widehat{T}$, wobei $\partial T = F_T(\partial\widehat{T})$.

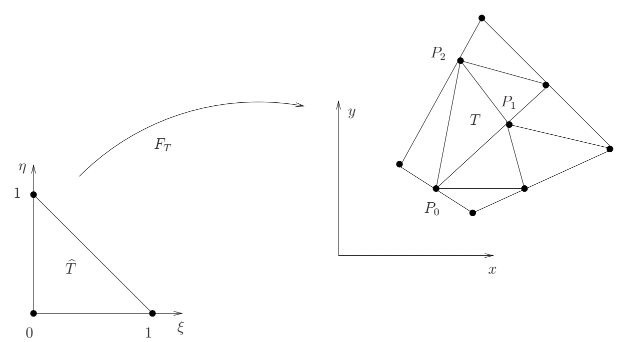

Abbildung 1: Affine Abbildung $F_T : \widehat{T} \to T$.

Aufgabe 2:

Sei das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$. Betrachten Sie die Randwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + \alpha u &= f \quad \text{in } \Omega\,,\\
\frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{auf } \partial\Omega\,,
\end{aligned}
$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ und $\alpha > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$(u, v)_* = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x + \alpha \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt in $H^1(\Omega)$ bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die von $(\cdot,\cdot)_*$ indizierte Norm $\|\cdot\|_* := \sqrt{(\cdot,\cdot)_*}$ zur Norm von $H^1(\Omega)$ äquivalent ist.

(c) Leiten Sie die schwache Formulierung des Problems her und zeigen Sie, dass sie eine eindeutige Lösung besitzt.

(d) Zeigen Sie, dass die eindeutige Lösung $u \in H^1(\Omega)$ stetig von den Daten f und g abhängt, d.h. es gilt

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right) .$$

Aufgabe 3:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und $\mathcal{T}$ eine reguläre Triangulierung von Ω. Zeigen Sie, dass der Finite-Elemente-Raum der stückweise linearen, stetigen Funktionen mit Nullrandwerte

$$V_N = \left\{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) : v|_T \text{ ist linear für alle } T \in \mathcal{T} \text{ und } v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\right\}$$

in $H_0^1(\Omega)$ enthalten ist.

Hinweis: *Sei $v \in V_N$. Für $x \in \Omega$ und $i = 1, 2$ definieren Sie $w_i : \Omega \to \mathbb{R}$ stückweise gemäss $w_i(x) = \partial_i v(x)$, wobei auf den Kanten einer der beiden Grenzwerte gewählt werden kann. Zeigen Sie, dass w_i die schwache Ableitung von v ist.*

Aufgabe 4: (*zum Bearbeiten von Harry Schmidt und Sebastian Suter*)

Präsentieren Sie die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty)\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty)\,. \end{aligned}$$

Hinweis: *Umfang der Beamer-Präsentation: Geschichte, Herleitung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, verschiedene Randbedingungen, schwache Formulierungen der stationären Stokes-Gleichungen mit homogener Dirichlet-Randbedingung. Die Präsentation sollte ungefähr 20 Minuten dauern.*

Abgabe: Dienstag, 10. November 2009, bis 15 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
`http://www.math.unibas.ch/~cohen`