Serie 9

zur 47. KW (16.11. - 22.11.2009)

Aufgabe 1: (*Programmieraufgabe*)

Betrachten Sie das Helmholtz-Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) + ku(x) &= f(x) \quad \text{in} \ \ (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $k > 0$.

Betrachten Sie die numerische Lösung des Problems (1) mittels stückweise linearen Finiten-Elementen. Um die Steifigkeitsmatrix, die Massenmatrix und den Lastvektor elementweise zu generieren, verwenden Sie Ihre Implementation aus der Aufgabe 2 der Serie 6.

- Um die Konvergenz der Methode zu studieren berechnen Sie den numerischen Fehler bezüglich der L^2- und H^1-Norm. Dazu implementieren Sie die Funktion:

```
function [H1_err, L2_err] = Errors_Lin_FE_1D(x, u, udx, uh)
% u     die exakte Lösung
% udx   die erste Ableitung der exakten Lösung
% uh    die numerische Lösung
```

  Hinweis: *Zur Berechnung des numerischen Fehlers verwenden Sie die Simpson-Quadratur. Ein Skelett des Codes* `Errors_Lin_FE_1D.m` *kann man von der Webseite herunterladen.*

- Schreiben Sie einen `MATLAB`-Code `Lin_FE_Helmholtz1D.m` zum Testen Ihrer Finite-Elemente-Implementierung. Als Testproblem wählen Sie $k = 1$ und die vorgegebene Lösung $u(x) = \sin(\pi x)$. Berechnen Sie die numerische Lösung und die Fehler für eine Sequenz von verfeinerten Gitter. Die Fehler zeichnen Sie auf einer `log`-`log`-Skala und bestimmen Sie die Konvergenzordnungen.

Aufgabe 2:

Mit Hilfe der Formfunktionen im Fall 1D linearer Finiter-Elemente

$$N_1(\xi) := 1 - \xi\,, \qquad N_2(\xi) := \xi\,, \qquad 0 \le \xi \le 1$$

bestimmt man die Formfunktionen im Fall 1D quadratischer Finiter-Elemente mit

$$N_1^q(\xi) = N_1(N_1 - N_2)\,, \quad N_2^q(\xi) = 4N_1N_2\,, \quad N_3^q(\xi) = N_2(N_2 - N_1)\,, \qquad 0 \le \xi \le 1\,.$$

Die Formfunktionen für die kubischen Finiten-Elemente lauten

$$\begin{aligned} N_1^k(\xi) &= \frac{N_1}{2}(N_2 - 2N_1)(2N_2 - N_1)\,, \quad N_2^k(\xi) = \frac{N_2}{2}(N_2 - 2N_1)(2N_2 - N_1)\,, \\ N_3^k(\xi) &= \frac{9}{2}N_1N_2(2N_2 - N_1)\,, \quad N_4^k(\xi) = \frac{9}{2}N_1N_2(2N_1 - N_2)\,, \qquad 0 \le \xi \le 1\,. \end{aligned}$$

(a) Plotten Sie die gegebenen Formfunktionen N_i^q, $i = 1, \dots, 3$ und N_j^k, $j = 1, \dots, 4$.

(b) Berechnen Sie die Elementsteifigkeitsmatrix im Fall quadratischer bzw. kubischer Finiter-Elemente.

(c) Mit Hilfe der Formel

$$\int_0^1 (N_1(\xi))^s \, (N_2(\xi))^t = \frac{s!\, t!}{(s+t+1)!}\,, \quad s,t \in \mathbb{N}_0$$

berechnen Sie die Elementmassenmatrix im Fall quadratischer bzw. kubischer Finiter-Elemente.

<u>Hinweis:</u> *Die Matrixeinträge sollen im Fall quadratischer Finiter-Elemente analytisch berechnet werden. Im Fall kubischer Finiter-Elemente berechnen Sie zwei Matrixeinträge analytisch. Um den Rest zu berechnen, könnten Sie* `MATLAB` *oder* `Maple` *verwenden.*

<u>Aufgabe 3:</u>

Betrachten Sie das Helmholtz-Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) + 4u(x) &= 1 \quad \text{in} \ \ (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie die exakte Lösung des Problems (2).

(b) Betrachten Sie die numerische Lösung des Problems (2) mittels stückweise quadratischen Finiten-Elementen. Berechnen Sie den Elementlastvektor.

(c) (*Programmieraufgabe*)

Implementieren Sie die numerische Lösung des Problems mittels stückweise quadratischen Finiten-Elementen.

- Um die Steifigkeitsmatrix, die Massenmatrix und den Lastvektor elementweise zu generieren, implementieren Sie die Funktion:

```
function [A, M, b] = Assemb_Quad_FE_1D(x, f)
% A   die Steifigkeitsmatrix
% M   die Massmatrix
% b   der Lastvektor
% x   die Gitterpunkte im (0, 1)
% f   die rechte Seite des Problems
```

  <u>Hinweis:</u> *Zur elementweise Generierung der Steifigkeitsmatrix und der Massenmatrix ist Aufgabe 2 hilfreich. Zur Generierung der rechten Seite könnten Sie keine Quadratur verwenden, da die rechte Seite konstant ist.*

- Um die Konvergenz der Methode zu studieren berechnen Sie den numerischen Fehler bezüglich der L^2-Norm. Dazu implementieren Sie die Funktion:

```
function [L2_err] = L2_Error_Quad_FE_1D(x, u, uh)
% u     die exakte Lösung
% uh    die numerische Lösung
```

Hinweis: *Zur Berechnung des numerischen Fehlers bezüglich der* L^2*-Norm verwenden Sie die Gauss-Legendre-Quadratur auf dem Intervall* $[0,1]$ *mit fünf Stützstellen. Auf der Webseite befindet sich die Datei* `Quad_GaussLeg.m`*, in der die Stützstellen und Gewichte der Quadratur gegeben sind. Ein Skelett des Codes* `L2_Error_Quad_FE_1D.m` *kann man von der Webseite herunterladen.*

- Schreiben Sie einen `MATLAB`-Code `Quad_FE_Helmholtz1D.m` zum Testen Ihrer Finite-Elemente-Implementierung. Berechnen Sie die numerische Lösung und den Fehler bezüglich der L^2-Norm für eine Sequenz von verfeinerten Gitter. Den Fehler zeichnen Sie auf einer `log-log`-Skala und bestimmen Sie die Konvergenzordnung.

Aufgabe 4: (*zum Bearbeiten von Annina Nef und Manuel Baumgartner*)

Präsentieren Sie die Konvektion-Diffusion-Gleichung.

Hinweis: *Umfang der Beamer-Präsentation: Geschichte, FDM- oder FEM-Diskretisierung im Ort, Zeit-Integration. Die Präsentation sollte ungefähr 20 Minuten dauern.*

Abgabe: Dienstag, 17. November 2009, bis 15 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`