Serie 10

zur 48. KW (23.11. - 29.11.2009)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie das Helmholtz-Problem

$$-u''(x) + 4u(x) = 1 \quad \text{in} \quad (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

(a) Betrachten Sie die numerische Lösung des Problems mittels stückweise kubischen Finiten-Elementen. Berechnen Sie den Elementlastvektor.

(b) (*Programmieraufgabe*)
Implementieren Sie die numerische Lösung des Problems mittels stückweise kubischen Finiten-Elementen.

- Um die Steifigkeitsmatrix, die Massenmatrix und den Lastvektor elementweise zu generieren, implementieren Sie die Funktion:

```
function [A, M, b] = Assemb_Kub_FE_1D(x, f)
% A   die Steifigkeitsmatrix
% M   die Massmatrix
% b   der Lastvektor
% x   die Gitterpunkte im (0, 1)
% f   die rechte Seite des Problems
```

  Hinweis: *Zur elementweise Generierung der Steifigkeitsmatrix und der Massenmatrix ist Aufgabe 2 der Serie 9 hilfreich. Zur Generierung der rechten Seite könnten Sie keine Quadratur verwenden, da die rechte Seite konstant ist.*

- Um die Konvergenz der Methode zu studieren berechnen Sie den numerischen Fehler bezüglich der L^2-Norm. Dazu implementieren Sie die Funktion:

```
function [L2_err] = L2_Error_Kub_FE_1D(x, u, uh)
% u     die exakte Lösung
% uh    die numerische Lösung
```

  Hinweis: *Zur Berechnung des numerischen Fehlers bezüglich der L^2-Norm verwenden Sie die Gauss-Legendre-Quadratur auf dem Intervall $[0,1]$ mit fünf Stützstellen.*

- Schreiben Sie einen `MATLAB`-Code `Kub_FE_Helmholtz1D.m` zum Testen Ihrer Finite-Elemente-Implementierung. Berechnen Sie die numerische Lösung und den Fehler bezüglich der L^2-Norm für eine Sequenz von verfeinerten Gitter. Den Fehler zeichnen Sie auf einer `log-log`-Skala und bestimmen Sie die Konvergenzordnung.
  Hinweis: *Die exakte Lösung des Problems haben Sie in Serie 9 (Aufgabe 3 (a)) berechnet.*

Aufgabe 2:

Betrachten Sie das Referenzrechteckelement $\widehat{K} = \{(\xi, \eta) \ : \ -1 \leq \xi, \eta \leq 1\}$.

(a) Bestimmen Sie die bilinearen Basisfunktionen $\varphi_i(\xi, \eta)$, $i = 1, \ldots, 4$ auf $\widehat{K}$.
<u>*Hinweis:*</u> *Es gilt $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, 4$, wobei $P_1 = (-1, -1)$, $P_2 = (1, -1)$, $P_3 = (1, 1)$, $P_4 = (-1, 1)$.*

(b) Betrachten Sie die Bilinearform $a(u, v) = \int_{\widehat{K}} \nabla u \cdot \nabla v$. Berechnen Sie die entsprechende Elementsteifigkeitsmatrix.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie das Konvektions-Diffusionsproblem

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u + \underline{b} \cdot \nabla u + u = f(x) & \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2\,, \\ u = 0 & \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $\underline{b} \in \mathbb{R}^2$, $\mu > 0$ konstant und $f(x) \in L^2(\Omega)$. Leiten Sie die schwache Formulierung des Problems her und zeigen Sie, dass sie eine eindeutige Lösung besitzt.

<u>*Hinweis:*</u> *Zeigen Sie, dass $(\underline{b} \cdot \nabla u)\, u = \frac{1}{2} \nabla \cdot \left(u^2 \underline{b}\right)$.*

Aufgabe 4: (*zum Bearbeiten von Annina Nef und Manuel Baumgartner*)

Präsentieren Sie die Konvektion-Diffusion-Gleichung.

<u>*Hinweis:*</u> *Umfang der Beamer-Präsentation: Geschichte, FDM- oder FEM-Diskretisierung im Ort, Zeit-Integration. Die Präsentation sollte ungefähr 20 Minuten dauern.*

Abgabe: Dienstag, 24. November 2009, bis 15 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`