Serie 11

zur 49. KW (30.11. - 06.12.2009)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie das Referenzrechteckelement $\widehat{K} = \{(\xi,\eta) : 0 \le \xi,\eta \le 1\}$ und die Basisfunktionen auf $\widehat{K}$

$$\varphi_1(\xi,\eta) = \sin(\pi\xi)\sin(\pi\eta)\,, \quad \varphi_3(\xi,\eta) = \sin(\pi\xi)\sin(3\pi\eta)\,,$$
$$\varphi_2(\xi,\eta) = \sin(3\pi\xi)\sin(\pi\eta)\,, \quad \varphi_4(\xi,\eta) = \sin(3\pi\xi)\sin(3\pi\eta)\,.$$

Überlegen Sie sich, dass $\varphi_i(\xi,\eta) \in H_0^1(\widehat{K})$. Betrachten Sie die Bilinearform

$$a(u,v) = \int_{\widehat{K}} \nabla u \cdot \nabla v\,.$$

Berechnen Sie die entsprechende Elementsteifigkeitsmatrix.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie das Randwertproblem (siehe Vorlesung)

$$-u_{xx}(x) = 1 \text{ in } (0,1)\,,$$
$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Zerlegen Sie das Interval $(0,1)$ mittels eines Gitters

$$x_0 = x_{1/2} = 0 < x_1 < x_{3/2} < \cdots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \cdots < x_N < x_{N+1/2} = x_{N+1} = 1$$

mit N Kontrollvolumen $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $i = 1,\dots,N$ und $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,\dots,N$.
Die Finite-Volumen-Approximation des Problems lautet

$$\frac{1}{h_i}\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}\right) = 1\,.$$

Betrachten Sie die Finite-Volumen-Approximation des Problems im Sinne vom Finiten-Differenzen-Verfahren, d.h. $u_i \approx u(x_i)$. Berechnen Sie den Approximationsfehler

$$r_i = \frac{1}{h_i}\left(\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-1/2}} - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}}\right) + u_{xx}(x_i)\,,\ i = 1,\dots,N\,.$$

Für eine Zerlegung mit

$$h_i = \begin{cases} h, & \text{falls } i \text{ gerade} \\ h/2, & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \text{und} \quad x_i = \frac{x_{i+1/2} + x_{i-1/2}}{2}$$

$i = 1, \dots, N$ zeigen Sie, dass

$$r_i = \begin{cases} \dfrac{1}{4} u_{xx}(x_i) + \mathcal{O}(h)\,, & \text{falls } i \text{ gerade}\,, \\ -\dfrac{1}{2} u_{xx}(x_i) + \mathcal{O}(h)\,, & \text{falls } i \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die numerische Approximation der Wärmeleitungsproblem

$$\begin{aligned} T_t(x,t) &= \alpha T_{xx}(x,t) \text{ in } \ (0,1) \times (0, t_{end})\,,\ \alpha > 0\,, \\ T(0,t) &= T(1,t) = T_D\,, \\ T(x,0) &= f(x)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Zur Diskretisierung im Ort verwenden Sie das Finite-Volumen-Verfahren auf einem äquidistanten Gitter

$$x_0 = x_{1/2} = 0 < x_1 < x_{3/2} < \cdots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \cdots < x_N < x_{N+1/2} = x_{N+1} = 1$$

mit N Kontrollvolumen $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ und Maschenweite $h = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $i = 1, \dots, N$. Als Zeitintegrator verwenden Sie das explizite Euler-Verfahren. Zeigen Sie, dass die numerische Approximation des Problems (1)

$$\begin{pmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N-1}^{n+1} \\ T_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-3\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_{N-1}^n \\ T_N^n \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} T_D \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_D \end{pmatrix}$$

lautet. Hier bezeichnen $T_i^n \approx \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} T(x, t_n)\,\mathrm{d}x$, $t_n = n\Delta t$ und $\lambda = \dfrac{\alpha \Delta t}{h^2}$.

Aufgabe 4: (*Programmieraufgabe*)

Schreiben Sie einen `MATLAB`-Code `Heat1D_FV_EE.m` um die numerische Lösung des Problems (1) zu berechnen. Zur Diskretisierung verwenden Sie die Methode, die Sie in der Aufgabe 3 hergeleitet haben.

Als Testproblem wählen Sie $\alpha = 1/\pi^2$ und die vorgegebene Lösung

$$T(x,t) \ = \ \mathrm{e}^{-t} \cos(\pi(x - 1/2))\,.$$

Plotten Sie die exakte bzw. numerische Lösung am Zeitpunkt $t_{end} = 4$ für $N = 40$ und $\Delta t = 0.0025$. Wählen Sie $\Delta t = 0.005$ und berechnen Sie wieder die numerische Lösung für $N = 40$. Plotten Sie die exakte bzw. numerische Lösung am Zeitpunkt $t_{end} = 4$ wieder. Was beobachten Sie?

Verwenden Sie Ihr Programm zur numerischen Lösung von (1) mit $\alpha = 0.5$ (die Temperaturleitfähigkeit vom Fensterglas), $T_D = 100$ und $f(x) \equiv 0$. Wählen Sie $N = 40$ und $\Delta t = 0.0005$. Verfolgen Sie die zeitabhängige Entwicklung der Lösung bis $t_{end} = 2$.

Hinweis: *Ein Skelett des Codes* `Heat1D_FV_EE.m` *kann man von der Webseite herunterladen.*

Aufgabe 5: (*zum Bearbeiten von Juri Chomé und Olaf Merkert*)

Präsentieren Sie die Burgersgleichung.

Hinweis: Umfang der Beamer-Präsentation: Geschichte, Herleitung, Charakteristiken, Stoss, Upwind-Verfahren. Die Präsentation sollte ungefähr 20 Minuten dauern.

Abgabe: Dienstag, 1. Dezember 2009, bis 15 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
http://www.math.unibas.ch/~cohen