Serie 12

zur 50. KW (07.12. - 13.12.2009)

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $A \cdot U = b$ mit

$$(A \cdot U)_i = \frac{1}{h_i}\left(-\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}}\right) \quad \text{und} \quad b_i = \overline{f}_i \quad (i = 1, \ldots, N)$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{N} (A \cdot U)_i \cdot u_i$.

Aufgabe 2:

Zeichnen Sie (per Hand) die Chakarteristiken der Burgers-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2(x,t)}{2}\right) = 0$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0\,, \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1\,, \\ 0 & 1 \leq x\,. \end{cases}$$

Aufgabe 3:

Betrachten Sie das Burgers-Problem

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2(x,t)}{2}\right) = 0\,,$$
$$u(x,0) = u_0(x)\,,$$

wobei $u_0(x)$ glatt ist und ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $u_0'(x_0) < 0$ existiert. Zeigen Sie, dass die Chakarteristiken sich zuerst nach dem Zeitpunkt

$$T = -\frac{1}{\min_{x \in \mathbb{R}} u_0'(x)}$$

überschneiden.

Hinweis: Betrachten Sie die allgemeine Lösung des Burgers-Problem

$$u(x,t) \;=\; u_0(x - t u(x,t)).$$

Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$. *Überlegen Sie, unter welcher Bedingung* $\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \to \infty$ *gilt.*

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung von

$$u_t(x,t) + f_x(u(x,t)) = 0$$

auch eine schwache Lösung ist.

Aufgabe 5: (*Programmieraufgabe*)

Betrachten Sie die Riemann-Probleme

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2(x,t)}{2}\right) = 0\,, \quad \text{(Burgers-Gl. in Erhaltungsform)} \\ &u(x,0) = \begin{cases} u_L\,, & x < 0\,, \\ u_R\,, & x > 0\,, \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(u(x,t)\right) = 0\,, \quad \text{(Burgers-Gl. in nicht Erhaltungsform)} \\ &u(x,0) = \begin{cases} u_L\,, & x < 0\,, \\ u_R\,, & x > 0\,, \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $x \in (-a,a)$, $a > 0$ und $t \in (0, t_{end})$.

Zerlegen Sie das Intervall $(-a,a)$ mittels eines äquidistanten Gitters mit N Kontrollvolumen K_i, $i = 1, \dots N$. Die Finite-Volumen(-Upwind)-Approximation des Problems (1) bzw. (2) lautet

$$u_i^{m+1} = u_i^m - \frac{\Delta t}{h}\left(\frac{1}{2}\left(u_i^m\right)^2 - \frac{1}{2}\left(u_{i-1}^m\right)^2\right) \quad i = 1, \dots, N\,.$$

bzw.

$$u_i^{m+1} = u_i^m - \frac{\Delta t}{h}u_i^m\left(u_i^m - u_{i-1}^m\right) \quad i = 1, \dots, N\,.$$

Hier bezeichnen $u_i^m \approx \frac{1}{h_i}\int_{K_i} u(x,t_m)\,\mathrm{d}x$ und $t_m = m\Delta t$.

Schreiben Sie einen `MATLAB`-Code `Upwind_BurgerEH.m` bzw. `Upwind_BurgerNEH.m` um die numerische Lösung des Problems (1) bzw. (2) zu berechnen.

Als Testproblem wählen Sie $a = 10$, $t_{end} = 1.5$, $u_L = 1.2$ und $u_R = 0.4$. Wählen Sie $N = 2000$ und $\Delta t = 0.005$. Plotten Sie die Anfangsbedingung. Verfolgen Sie die zeitabhängige Entwicklung der exakten und numerischen Lösungen.

Hinweis: *Um u_{i-1}^m zu implementieren, verwenden Sie die periodische Bedingung $u_0^m = u_N^m$. Ein Skelett des Codes kann man von der Webseite herunterladen.*

Abgabe: Dienstag, 8. Dezember 2009, bis 15 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`