Zusammenfassung: Kapitel 2

- Typen-Einteilung von linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung: elliptisch, hyperbolisch, parabolisch.

- Die *Wellengleichung* auf $[0, \ell]$. Für $u := u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  mit *Anfangsbedingungen* $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ und *Dirichlet-Randbedingungen* $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$.

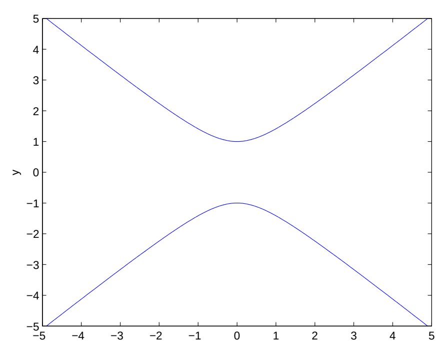
  - Die Lösung von d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+at) + f(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

  - Die Lösung mit Fourierreihen (Trennung der Variablen):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\Big(a_n \cos\left(\frac{n\pi at}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi at}{\ell}\right)\Big).$$

  - Die Wellengleichung ist ein *wohl gestelltes Problem*, d.h. es existiert eine eindeutige *klassische* Lösung ($u(x,\cdot) \in \mathcal{C}^2, u(\cdot,t) \in \mathcal{C}^2$) die stetig von f und g abhängt.
  - Hyperbolisch: $u_{tt} - u_{xx} = 1$ vergleichen mit $t^2 - x^2 = 1$.



- Die *Wärmeleitungsgleichung* auf $[0, \ell]$. Für $u := u(x,t)$:

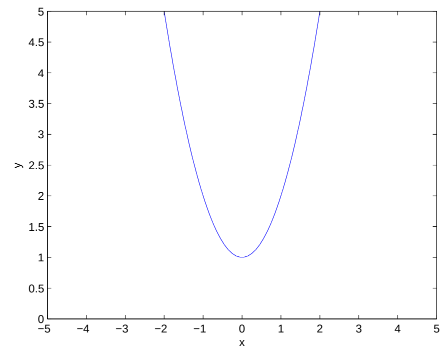
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  mit *Anfangsbedingung* $u(x,0) = f(x)$ und *Dirichlet-Randbedingungen* $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$.

- Die Lösung mit Fourierreihen:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-(an\pi/\ell)^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{\ell}).$$

- Die Wärmeleitungsgleichung ist ein *wohl gestelltes Problem*, d.h. es existiert eine eindeutige *klassische* Lösung ($u(x,\cdot) \in \mathcal{C}^1, u(\cdot,t) \in \mathcal{C}^2$) die stetig von f abhängt.
- Parabolisch: $u_t - u_{xx} = 1$ vergleichen mit $t - x^2 = 1$.



- Die *Laplace/Poisson-Gleichungen* in $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Für $u := u(x,y)$:

$$-\Delta u = 0 \quad (Laplace) \quad -\Delta u = f \quad (Poisson) \quad \text{in} \quad (0,1) \times (0,1)$$

mit *Dirichlet-Randbedingung* $u = g$ auf $\partial\Omega$.

- Die Lösung mit Fourierreihen im Viereck $[0,1] \times [0,1]$:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\big(a_n \sinh(n\pi y) + b_n \sinh(n\pi(1-y))\big) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi y)\big(c_n \sinh(n\pi x) + d_n \sinh(n\pi(1-x))\big). \end{aligned}$$

- Das Maximumprinzip wurde bewiesen um zu zeigen, dass die klassische Lösung der Poisson-Gleichung eindeutig ist und dass sie stetig von g abhängt.
- Elliptisch: $u_{xx} + u_{yy} = 1$ vergleichen mit $x^2 + y^2 = 1$.