Zusammenfassung: Kapitel 3

- Wir betrachten die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ u(x,y) &= g(x,y) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

  Für eine Schrittweite $h = \dfrac{1}{N+1}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2_h &= \{(ih, jh) : i, j \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_h &= \mathbb{R}^2_h \cap \Omega,\ \partial\Omega_h = \mathbb{R}^2_h \cap \partial\Omega,\ \overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup \partial\Omega_h. \end{aligned}$$

- 2. Ordnung Finite-Differenzen Verfahren für die Poisson-Gleichung: Suche eine *Gitterfunktion* $u_h : \overline{\Omega}_h \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(x,y) &= f_h(x,y) =: f_{|\Omega_h}(x,y) \quad \text{für} \quad (x,y)\in\Omega_h \\ u_h(x,y) &= g_h(x,y) =: g_{|\partial\Omega_h}(x,y) \quad \text{für} \quad (x,y)\in\partial\Omega_h \end{aligned}$$

  mit dem 5-*Punkt-Stern-Verfahren*

$$\Delta_h u_h(x,y) = \frac{1}{h^2}\big(u_h(x+h,y) + u_h(x-h,y) + u_h(x,y+h) + u_h(x,y-h) - 4u_h(x,y)\big).$$

  Wir haben noch eine andere Formulierung als lineares Gleichungssytem

$$AU = b$$

  gesehen. Die Matrix A ist, in diesem einfachen Fall, SPD.

- *Diskretes Maximumprinzip*: Sei $u_h : \overline{\Omega}_h \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$-\Delta_h u_h(x,y) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_h.$$

  Dann gilt

$$\min_{\partial\Omega_h} u_h \le u_h(x,y) \le \max_{\partial\Omega_h} u_h \quad \forall\ (x,y)\in\overline{\Omega}_h.$$

- *Vergleichsprinzip*: Für $u_h, v_h : \overline{\Omega}_h \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(x,y) &\le -\Delta_h v_h(x,y) \quad \text{in} \quad \Omega_h \\ u_h &\le v_h \quad \text{auf} \quad \partial\Omega_h. \end{aligned}$$

  Dann gilt

$$u_h(x,y) \le v_h(x,y) \quad \forall\ (x,y)\in\Omega_h.$$

- Aus den obigen Sätzen folgt, dass die diskrete Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_h(x,y) &= f_h(x,y) \quad \text{für} \quad (x,y) \in \Omega_h \\ u_h(x,y) &= g_h(x,y) \quad \text{für} \quad (x,y) \in \partial\Omega_h \end{aligned}$$

  eine eindeutige Lösung hat. Diese Technik kann man auch benutzen für das elliptische Problem $\mathcal{L}u = f$.

- Sei $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, sei $u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$ die Lösung der Poisson-Gleichung. Sei $u_h : \overline{\Omega}_h \longrightarrow \mathbb{R}$ die Lösung der diskreten Poisson-Gleichung. Dann gilt

$$\max_{\Omega_h} |u_h - u| \leq Konst \cdot h^2.$$

- Verallgemeinerungen: Neumann RB, kompakte 9-Punkte-Stern-Verfahren, allgemeines Gebiet, das Shortley-Weller-Schema, allgemeine elliptische PDG 2. Ordnung.