Zusammenfassung: Kapitel 5

- Herleitung der *Erhltungsgleichung*

$$\partial_t q(x,t,u(x,t)) + \mathrm{div} F(x,t,u(x,t)) = f(x,t,u(x,t)).$$

  Als Beispiele haben wir die folgende Gleichungen gesehen:

  (i) $q = u, F = -\nabla u$ liefert die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \Delta u = f$.

  (ii) $q = u, F = F(u), f = 0$ liefert die *skalare hyperbolische Erhaltungsgleichung in 1D* $\partial_t u + \partial_x\big(F(u)\big) = 0$.

  (iii) $U = (\rho, \rho v, E)^T$ und $F = (\rho v, \rho v^2 + p, (E+p)v)^T$ liefert die *1D-Eulergleichung der Gasdynamik*.

- Ideen der *Finite-Volume-Methode* für das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &+ \mathrm{div} F(u) = f(u) \text{ in } V \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

  (i) Wir betrachten die Mittelwerte auf $K \times]t_n, t_{n+1}[$, wobei K einen *Kontrollvolumen* ist:

$$\frac{1}{\Delta t}\frac{1}{|K|}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_K \big(\partial_t u(x,t) + \mathrm{div} F(u)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{1}{\Delta t}\frac{1}{|K|}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_K f(u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

  (ii) Mit dem Divergenzsatz erhalten wir das Verfahren zur Approximation der Mittelwerte der exakten Lösung auf einem Kontrollvolumen K

$$\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\Delta t} + \frac{1}{|K|}\sum_L E_{KL}^n(u_L^n) = f(u_K^n),$$

  wobei $E_{KL}^n(u_L^n)$ der *numerische Fluss* ist.

  Als Beispiel haben wir die Poisson-Gleichung in $1D$ mit Dirichlet und Neumann Randbedingung betrachten.

- Kleiner Vergleich zwischen *FVM*, *FEM* und *FD*.

- Wir betrachten die *Burgers-Gleichung*

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &+ \Big(\frac{u^2(x,t)}{2}\Big)_x = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) &= u_0(x) \text{ in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Für kleine Zeit und glatten Anfangsdaten $u_0(x)$ haben wir die Lösung mit Hilfe von den *Charakteristiken*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = u(x(t),t),\ x(0) = x_0$$

gefunden: $u(x,t) = u_0(x - tu(x,t))$ (implizite Lösungsformel).

Für grössere t ist die Lösung von $x(t) = x_0 + u_0(x_0)$ nicht mehr eindeutig, dies kann passieren, z.B., wenn die Charakteristiken sich überschneiden, wir haben eine Unstetigkeit oder einen *Stoss*.

- Um die physikalische relevante Lösung der Burgers-Gleichung zu finden, betrachten wir die *viskose Burgers-Gleichung*

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &+ \Big(\frac{u^2(x,t)}{2}\Big)_x = \varepsilon u_{xx}(x,t) \text{ in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \\ u(x,0) &= u_0(x) \text{ in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

  und lassen ε gegen Null gehen.

- Eine *schwache Lösung* der Gleichung

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &+ \big(f(u(x,t))\big)_x = 0 \text{ in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \\ u(x,0) &= u_0(x) \text{ in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

  wurde definiert. *Achtung:* im Allgemein sind schwache Lösungen nicht eindeutig. Um die physikalische relevante Lösung zu bestimmen kann man eine *Entropie-Bedingung* betrachten.

- Um einen Stoss besser zu verstehen und, später, numerischen Verfahren zu erhalten, betrachten wir das *Riemann-Problem für die Burgers-Gleichung*

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &+ \Big(\frac{u^2(x,t)}{2}\Big)_x = 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x<0 \\ u_R, & x>0 \end{cases}. \end{aligned}$$

  Falls $u_L > u_R$ erhalten wir die eindeutige schwache Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x<st \\ u_R, & x>st \end{cases}$$

  mit der *Stossgeschwindigkeit* $s = \frac{1}{2}(u_L + u_R)$. Diese Stossgeschwindigkeit wurde mit Hilfe der *Rankine-Hugoniot-Bedingung* $s = \frac{f(u_L)-f(u_R)}{u_L-u_R}$ bewiesen (für eine hyperbolische Gleichung $u_t + \big(f(u)\big)_x = 0$).

  Falls $u_L < u_R$ gibt es unendliche viele schwache Lösungen, darunter die *Verdünnungswelle*

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < u_L t \\ x/t, & u_L t < x < u_R t \\ u_R, & x > u_R t \end{cases}.$$

  Diese Lösung entspricht der Lösung der viskose Gleichung mit ε gegen Null.

- Die Herleitung und der Algorithmus der *Finite-Volume-Methode in Erhaltungsform*

  $$u_i^{m+1} = u_i^m - \frac{\Delta t}{h_i}\big(g(u_i^m, u_{i+1}^m) - g(u_{i-1}^m, u_1^m)\big)$$

  wurde präsentiert. Wir haben auch die diskrete Erhaltungseigenschaft des Verfahrens gesehen.

  Als Beispiele haben wir

  das *Lax-Friedrichs Verfahren*

  $$u_i^{m+1} = u_i^m - \frac{\Delta t}{2h}\big(g(u_i^m, u_{i+1}^m) - g(u_{i-1}^m, u_i^m)\big), \; g(v, w) := \frac{1}{2}(f(v) + f(w)) + \frac{h}{2\Delta t}(v - w),$$

  das *Engquist-Osher-Verfahren*

  $$g(v, w) := f^+(v) + f^-(w) := f(0) + \int_0^u \max(f'(s), 0)\,\mathrm{d}s + \int_0^u \min(f'(s), 0)\,\mathrm{d}s,$$

  und das *Godunov-Schema*

  $$g(v, w) := \begin{cases} \min_{v \le s \le w} f(s), & v < w \\ \max_{w \le s \le v} f(s), & v \ge w \end{cases},$$

  gesehen.