Serie 1

zur 10. KW (08.03. - 14.03.2010)

Aufgabe 1: (*Programmieraufgabe*)

Pendel. Wir betrachten die Hamilton-Funktion

$$H(p(t), q(t)) := \frac{1}{2}p(t)^2 - \cos(q(t)).$$

Schreiben Sie die Hamilton-Gleichungen auf. Für die Anfangsdaten $(p(0), q(0)) = (0, 1)$, plotten Sie die Position des Pendels $q(t)$ für das Zeitintervall $[0, 50]$ und die numerische Lösung (mit Schrittweite $h = 0.2$) gegeben durch die folgenden Verfahren:

1. Explizites Euler-Verfahren
2. Implizites Euler-Verfahren
3. Symplektisches Euler-Verfahren
4. Störmer-Verlet Verfahren.

Plotten Sie dazu noch die Energie $H(p(t), q(t))$ für das Zeitintervall $[0, 200]$ und die Schrittweite $h = 0.2$.

Aufgabe 2:

Wir betrachten den harmonischen Oszillator

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$$

mit Anfangsdaten $q(0), \dot{q}(0)$. Zeigen Sie, dass man die exakte Lösung wie folgt schreiben kann:

$$\begin{pmatrix} \omega q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega q(0) \\ \dot{q}(0) \end{pmatrix}.$$

Für die numerischen Lösungen (explizites Euler-Verfahren, Störmer-Verlet, symplektisches Euler-Verfahren) zeigen Sie, dass folgendes gilt

$$\begin{pmatrix} \omega q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{pmatrix} = M(\omega h) \begin{pmatrix} \omega q_n \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}.$$

Für welche Methode hat man $\det(M(\omega h)) = 1$?

Aufgabe 3: (*Programmieraufgabe*)

Kepler-Problem. Wir betrachten die Hamilton-Funktion

$$H(p,q) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}.$$

Schreiben Sie die dazugehörigen Hamilton-Gleichungen. Als Anfangsdaten nehmen wir

$$q_1(0) = 1 - e, q_2(0) = 0, p_1(0) = 0, p_2(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

wobei $e = 0.6$. Damit sind die Bahnen elliptisch mit Exzentrizität e und die Bewegung ist periodisch mit Periode $T = 2\pi$.

1. Wir betrachten das explizite Euler-Verfahren, die Mittelpunktregel und das symplektische Euler-Verfahren. Plotten Sie die Position des ersten Körpers für das Zeitintervall $[0, 20T]$ mit Schrittweite $h = 2 \cdot 10^{-3}$.
2. Für verschiedene Schrittweiten h, plotten Sie die Energie $H(p_n, q_n)$ als Funktion der Zeit $t = nh$. Was beobachten Sie?
3. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls

$$L(p(t), q(t)) = q_1(t)p_2(t) - q_2(t)p_1(t)$$

entlang der exakten Lösung erhalten bleibt. Was passiert mit den numerischen Lösungen der obigen Aufgabe?

---

ohne Abgabe

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`