Serie 2

zur 11. KW (15.03. - 21.03.2010)

Aufgabe 1:

Berechnen Sie alle Kollokationsverfahren mit $s = 2$ in Abhängigkeit von c_1 und c_2. Studieren Sie ihre Ordnung.

Aufgabe 2:

Finden Sie alle Bäume der Ordnungen 4 und 5. Geben Sie jedes Mal zwei Elementare-Differentiale.

Aufgabe 3:

Zeitabhängiges Hamilton-System. Ein zeitabhängiges oder nicht-autonomes Hamilton-System im $\mathbb{R}^{2d}$ besitzt die Hamilton-Funktion

$$H = H(p, q, t).$$

Die dazugehörigen Differentialgleichungen lauten folgendermassen:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\nabla_q H(p, q, t), \\ \dot{q} &= \nabla_p H(p, q, t). \end{aligned}$$

Im nicht-autonomen Fall ist die Energie nicht mehr erhalten. Jedoch ist es möglich, ein erweitertes System zu konstruieren, indem man t mit einer neuen Variablen Q identifiziert. Nach Hinzunahme des neuen Impulses P lautet die Hamilton-Funktion

$$\tilde{H} = H(p, q, Q) + P.$$

1. Schreiben Sie die Differentialgleichungen für die erweiterte Hamilton-Funktion $\tilde{H}$ auf. Zeigen Sie, dass unter Verwendung der Anfangsbedingungen $p(t_0) = p_0$, $q(t_0) = q_0$, $P(t_0) = 0$ und $Q(t_0) = t_0$ die Lösung mit derjenigen der ursprünglichen Hamilton-Funktion H mit Anfangsbedingungen $p(t_0) = p_0$ und $q(t_0) = q_0$ übereinstimmt.
2. Ein symplektischer Integrator, der auf das erweiterte Hamilton-System angwandt wird, kann auf einen Integrator für das ursprüngliche System reduziert werden. Vereinfachen Sie die Hamilton-Gleichungen, die mit dem symplektischen Euler-Verfahren erhalten wurden, und zeigen Sie, dass in Abhängigkeit der ursprünglichen Variablen die Methode äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - h\nabla_q H(p_{n+1}, q_n, t_n), \\ q_{n+1} &= q_n + h\nabla_p H(p_{n+1}, q_n, t_n). \end{aligned}$$

3. Finden Sie die Verallgemeinerung des Störmer-Verlet Verfahrens auf ein nicht-autonomes Hamilton-System der Form

$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^T p + V(q, t).$$

Aufgabe 4: (*Programmieraufgabe*)

Gegeben sei die Hamilton-Funktion

$$H(p, q, t) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega(\varepsilon t)^2 q^2) + U(q)$$

mit $\omega(\varepsilon t) = \frac{1}{\sqrt{1+0.25\sin(2\pi\varepsilon t)}}$ und dem Potential $U(q) = \cos(q)q^3$.
Wir definieren die erweiterte Hamilton-Funktion $\tilde{H}$ als

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}(p^2 + \omega(Q)^2 q^2) + \varepsilon P + U(q).$$

Finden Sie die Hamilton-Gleichungen für p, q, P und Q, wobei $Q = \varepsilon t$. Lösen Sie für $h = 0.01$ und für $\varepsilon = 0.05$ die Gleichungen mit dem Störmer-Verlet Verfahren und dem symplektischen Euler-Verfahren im Intervall $[0, 100]$. Wählen Sie die Anfangswerte $p(0) = 0$ und $q(0) = 1$. Plotten Sie H und $\tilde{H}$.

Abgabe bis 22.03.2010, 14:00

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
`http://www.math.unibas.ch/~cohen`