Serie 3

zur 12. KW (22.03. - 28.03.2010)

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die adjungierte Methode des symplektischen Euler-Verfahrens.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass das Störmer-Verlet Verfahren symmetrisch ist.

Aufgabe 3:

Beweisen Sie, dass die expliziten Runge-Kutta Verfahren nicht symmetrisch sein können.

Hinweis: Betrachten Sie die Testgleichung $y' = \lambda y$. Ein explizites Runge-Kutta Verfahren kann geschrieben werden als $y_1 = R(h\lambda)y_0$, wobei R ein Polynom ist. Nehmen Sie an, das Runge-Kutta Verfahren sei symmetrisch und finden Sie einen Widerspruch.

Aufgabe 4:

1. Zeigen Sie, dass ein Kollokationsverfahren genau dann symmetrisch ist, wenn $c_i + c_{s+1-i} = 1$ für $i = 1, \dots, s$.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass das adjungierte Verfahren ein Kollokationsverfahren mit $c_i^* = 1 - c_{s+1-i}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass die Verfahren von Gauss symmetrisch sind.

Aufgabe 5:

Zeitreversible Verfahren. Ein Hamilton-System heisst zeitreversibel bezüglich der Involution S, falls

$$H(z) = H(Sz) \text{ mit } z = (p, q)^T \text{ und } S = \begin{pmatrix} -I_d & 0 \\ 0 & I_d \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet I_d die $d \times d$-Einheitsmatrix und d die Dimension von p und q. Für die Hamilton-Gleichungen $\dot{z} = f(z)$ zeigen Sie, dass

$$f(z) = -Sf(Sz)$$

gilt. Zeichnen Sie den Phasen-Raum für $d = 1$. Ein numerisches Verfahren Φ_h heisst zeitreversibel bezüglich der Involution S, falls

$$\Phi_h(z_0) = S\Phi_h^{-1}(S(z_0))$$

gilt. Prüfen Sie, ob das Störmer-Verlet Verfahren, die Mittelpunktsregel und das symplektische Euler-Verfahren zeitreversibel sind.

Hinweis: Bei einem symmetrischen Verfahren lässt sich Φ_h^{-1} vereinfachen.

Aufgabe 6: (*Programmieraufgabe*)

Nyström Methoden. In dieser Aufgabe betrachten wir Differentialgleichungen 2. Ordnung, d. h.

$$\ddot{y} = g(t, y, \dot{y}).$$

Seien c_i, $\bar{b}_i$, $\bar{a}_{ij}$, $\hat{b}_i$ und $\hat{a}_{ij}$ reelle Koeffizienten. Eine Nyström Methode für unser Problem lautet folgendermassen:

$$\begin{aligned} l_i &= g(t_0 + c_i h, y_0 + c_i h\dot{y}_0 + h^2 \textstyle\sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} l_j, \dot{y}_0 + h \sum_{j=1}^s \hat{a}_{ij} l_j), \\ y_1 &= y_0 + h\dot{y}_0 + h^2 \textstyle\sum_{i=1}^s \bar{b}_i l_i, \\ \dot{y}_1 &= \dot{y}_0 + h \textstyle\sum_{i=1}^s \hat{b}_i l_i. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass das Störmer-Verlet Verfahren (für $\ddot{y} = g(y)$) eine Nyström Methode mit $s = 2$ ist. Berechnen Sie die Koeffizienten.
2. *Geladenes Teilchen im Magnetfeld.* Der Vektor $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ repräsentiere ein Magnetfeld. Dann haben die Bewegungsgleichungen des Teilchens die Form

$$m\ddot{q} = -\gamma \frac{q}{||q||^3} + b \times \dot{q}$$

   mit m der Masse des Teilchens und γ einer Konstante. Setzen Sie $m = \gamma = 1$ und finden Sie die Hamilton-Gleichungen. Lösen Sie die Gleichungen für $q_0 = (1, 1, 1)^T$, $p_0 = (0, 0, 0)^T$ und $b = (0, 0, 1)^T$ mit dem Störmer-Verlet Verfahren unter der Annahme $\hat{a}_{ij} = 0 \;\forall\; i, j$ im Intervall $[0, 50]$ mit $h = 10^{-2}$. Plotten Sie q_2 gegen q_1.

Aufgabe 7:

Variation der Konstanten. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Die Lösungen von $\dot{z} = A(t)z$ bilden einen Vektoraum.
2. Die Lösungen hängen linear von z_0 ab.
3. Dann ist die Lösung von $\dot{z} = A(t)z$, $z(t_0) = z_0$, gegeben durch die invertierbare Matrix

$$z(t, t_0, z_0) = R(t, t_0)z_0$$

   mit der Matrix $R(t, t_0)$ (Resolvente). Es folgt

$$R'(t, t_0)z_0 = A(t)R(t, t_0)z_0 \text{ und } R(t_0, t_0)z_0 = z_0.$$

4. Die Lösung von $\dot{z} = A(t)z + g(t)$, $z(t_0) = z_0$, ist gegeben durch

$$z(t) = R(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)g(s)\,\mathrm{d}s.$$

   Hinweis: Machen Sie den Ansatz $z(t) = R(t, t_0)c(t)$ und verwenden Sie, dass $R^{-1}(t_2, t_1) = R(t_1, t_2)$.

Abgabe bis 29.03.2010, 14:00

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`