Serie 4

zur 13. KW (29.03. - 04.04.2010)

Aufgabe 1:

Sei Φ_h ein Einschrittverfahren der Ordnung 2. Kann das Verfahren

$$\Psi_h := \Phi_{b_1 h} \circ \cdots \circ \Phi_{b_m h}$$

mindestens Ordnung 3 haben, falls die Koeffizienten b_i, $i = 1, \ldots, m$, positiv sind?

Aufgabe 2:

Seien $\{b_i, a_{ij}\}$ und $\{\tilde{b}_i, \tilde{a}_{ij}\}$ die Koeffizienten zweier RK-Verfahren Φ_h und $\tilde{\Phi}_h$. Zeigen Sie, dass $\Phi_{\alpha h} \circ \tilde{\Phi}_{(1-\alpha)h}$ wieder ein RK-Verfahren ist. Wie sieht das Tableau aus?

Aufgabe 3: (*Programmieraufgabe*)

Arenstorf Orbits. Zwei schwere und ein leichter Körper bewegen sich in der (x, y)-Ebene und beeinflussen sich gegenseitig. Mit einigen Vereinfachungen erhält man die Bewegungsgleichungen für den leichten Körper

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} - V_x(x, y),\\ \ddot{y} &= -2\dot{x} - V_y(x, y).\end{aligned}$$

Das Potential V ist gegeben durch $V(x, y) = -\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2}$, wobei μ_1 die Masse des ersten und μ_2 die Masse des zweiten schweren Körpers ist. $r_1 = \sqrt{(x-\mu_2)^2 + y^2}$ und $r_2 = \sqrt{(x+\mu_1)^2 + y^2}$ bezeichnen die Abstände des leichten Körpers von den beiden schweren. Die beiden schweren sind fest bei den Punkten $(\mu_2, 0)$ und $(-\mu_1, 0)$. Die Lösungen dieses Problems heissen Arenstorf Orbits.

Für $\mu_1 = 0.012277471$, $\mu_2 = 1 - \mu_1$ und die Anfangsdaten

$$\begin{aligned}x(0) &= 0.994, & \dot{x}(0) &= 0,\\ y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= -2.001585106379082\end{aligned}$$

erhält man eine periodische Bahn mit Periode $T = 17.06521656015796255$.

Mit $q = (x, y, 0)^T$ und $p = (\dot{x}, \dot{y}, 0)^T$ ergeben sich die Hamilton-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p,\\ \dot{p} &= b \times p - \nabla_q V(q)\end{aligned}$$

mit $b = (0, 0, -2)^T$. Lösen Sie die Gleichungen mit der Mittelpunktsregel ($h = 10^{-4}$), der Methode von Scovel ($h = 10^{-4}$), der zusammengesetzten Methode 4. Ordnung mit 5 Stufen, $\Psi_h = \Phi_{b_1 h} \circ \Phi_{b_2 h} \circ \Phi_{b_3 h} \circ \Phi_{b_2 h} \circ \Phi_{b_1 h}$, die die Methode von Scovel als Basis Φ_h nimmt ($h = 10^{-3}$) und der zusammengesetzten Methode 4. Ordnung mit 3 Stufen mit den b's aus dem Beispiel aus der Vorlesung, die ebenfalls die Methode von Scovel als Basis nimmt ($h = 10^{-3}$). Plotten Sie die Position q_2 gegen q_1 für alle Methoden und den Fehler $||(x(T) - 0.994, y(T))^T||$ nach einer Periode für die zusammengesetzte Methode mit 3 Stufen für die Schrittweiten $h = 10^{-3}$, $h = 10^{-4}$ und $h = 10^{-5}$ in einem `loglog`-Plot.

Die Methode von Scovel ist wie folgt gegeben:

$$
\begin{aligned}
p_{n+\frac{1}{2}} &= p_n - \tfrac{h}{2}\nabla_q V(q_n),\\
q_{n+1} &= q_n + (hI + \tfrac{1-\cos(2h)}{4}\Omega - \tfrac{\sin(2h)-2h}{8}\Omega^2)p_{n+\frac{1}{2}},\\
p_{n+1} &= \exp(h\Omega)p_{n+\frac{1}{2}} - \tfrac{h}{2}\nabla_q V(q_{n+1}),
\end{aligned}
$$

wobei $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Für die zusammengesetzte Methode mit 5 Stufen (McLachlan) verwenden Sie die Werte $b_1 = 0.28$, $b_2 = 0.62546642846767004501$ und $b_3 = 1 - 2(b_1 + b_2)$.

<u>*Hinweis:*</u> Haben Sie Geduld, die Berechnung dauert etwa 15 Minuten...

Abgabe der Programmieraufgabe bis 05.04.2010, 14:00, per E-Mail, Abgabe der Theorieaufgaben bis 06.04.2010, 09:15

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`