Serie 5

zur 14. KW (05.04. - 11.04.2010)

Aufgabe 1:

Beweisen Sie das Korollar aus der Vorlesung:

Ein partitioniertes Runge-Kutta Verfahren für $\begin{cases} \dot{p} = f(p,q) \\ \dot{q} = g(p,q) \end{cases}$ erhält eine lineare Invariante $I(p,q) = d_1^T p + d_2^T q$, mit d_i konstant, falls $b_i = \hat{b}_i$ (oder falls $I(p,q)$ nur von p oder q abhängt).

Aufgabe 2:

Beweisen Sie das Theorem aus der Vorlesung:

Falls eine PRK-Methode die Bedingungen

$$b_i \hat{a}_{ij} + \hat{b}_j a_{ji} = b_i \hat{b}_j,$$
$$b_i = \hat{b}_i$$

mit $i, j = 1, \ldots, s$ erfüllt, dann erhält das Verfahren eine quadratische Invariante der Form $Q(p,q) = p^T D q$, mit D beliebig.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass das symplektische Euler-Verfahren eine quadratische Invariante der Form $Q(p,q) = p^T D q$, mit D beliebig, erhält.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass falls Φ_h eine quadratische Invariante der Form $Q(y) = y^T C y$, mit C symmetrisch, erhält, dann erhält sie auch Φ_h^*.

Aufgabe 5: (*Programmieraufgabe*)

Lotka-Volterra Problem. Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u(v-2), \\ \dot{v} &= v(1-u). \end{aligned}$$

Lösen Sie das Problem mit dem expliziten Euler-Verfahren (Startwert $(u(0), v(0)) = (2,2)$), dem impliziten Euler-Verfahren (Startwert $(u(0), v(0)) = (4,8)$) und dem symplektischen Euler-Verfahren (Startwert $(u(0), v(0)) = (4,2)$ und $(u(0), v(0)) = (6,2)$) jedesmal mit Schrittweite $h = 0.12$ im Intervall $[0, 24]$. Beobachten Sie, was mit der Erhaltungsgrösse $I(u,v) = \ln(u) - u + 2\ln(v) - v$ passiert. Plotten Sie ausserdem v gegen u und in einem weiteren Plot v gegen die Zeit und u gegen die Zeit.

Abgabe bis 12.04.2010, 14:00

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
`http://www.math.unibas.ch/~cohen`