Serie 6

zur 15. KW (12.04. - 18.04.2010)

Aufgabe 1: (*Programmieraufgabe*)

Gestörtes Kepler-Problem. Wir betrachten das gestörte Kepler-Problem mit der Hamilton-Funktion

$$H(p,q) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} - \frac{0.005}{2\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)^3}}$$

und Anfangsbedingungen $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$, $q_1(0) = 1 - e$, $q_2(0) = 0$ mit der Exzentrizität $e = 0.6$ im Intervall $[0, 200]$. Aus Serie 1 wissen wir, dass dieses Problem zwei Grössen erhält, nämlich die Hamilton-Funktion $H(p,q)$ und den Drehimpuls $L(p,q) = q_1 p_2 - q_2 p_1$.

Lösen Sie das Problem mit dem expliziten Euler-Verfahren und dem symplektischen Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 0.03$, jeweils einmal ohne Projektion, einmal mit der Projektion auf die Mannigfaltigkeit $H(p,q) = H(p_0, q_0)$ und einmal mit der Projektion auf beide Invarianten, d. h. $H(p,q) = const.$ und $L(p,q) = const.$ Plotten Sie q_2 gegen q_1.

Aufgabe 2: (*Projektionsverfahren*)

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= B(Y)Y \\ Y(0) &= Y_0 \end{aligned}$$

mit einer spurfreien Matrix $B(Y)$, d.h. $\mathrm{Spur} B(Y) = 0 \; \forall \, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir wissen, dass $g(Y) := \det(Y) - \det(Y_0)$ eine Erhaltungsgrösse ist.

1. Zeigen Sie, dass $Y_1 = \tilde{Y}_1 + g'(\tilde{Y}_1)^T \lambda$ dasselbe ist wie $Y_1 = \tilde{Y}_1 + \lambda \det(\tilde{Y}_1) \tilde{Y}_1^{-T}$.
   Hinweis: Betrachten Sie die Matrix Y als einen Vektor $(y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22})$, um $g'(Y)^T$ zu berechen.

2. Setzen Sie $\mu = \lambda \det(\tilde{Y}_1)$ und zeigen Sie, dass das vereinfachte Newton-Verfahren für $g(Y_1) = 0$

$$\det \tilde{Y}_1 \mathrm{Spur}((\tilde{Y}_1^T \tilde{Y}_1)^{-1})(\mu_{n+1} - \mu_n) = -(\det(\tilde{Y}_1 + \mu_n \tilde{Y}_1^{-T}) - \det(Y_0)).$$

   lautet.

Aufgabe 3:

Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen. Wir betrachten das folgende Problem:

Sei $L(x, y(x), y'(x))$ eine stetige Funktion, die in einer offenen Menge von $\mathbb{R}^3$ definiert ist und Werte in $\mathbb{R}$ annimmt. Man sucht ein $y(x)$ so, dass $T(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x$ minimal ist unter allen Funktionen aus $\mathcal{C}^1$, die $y(a) = A$ und $y(b) = B$ erfüllen.

1. Beweisen Sie das folgende Lemma:

   Sei $y \in \mathcal{C}^1([a, b])$ eine Funktion mit $y(a) = A$ und $y(b) = B$. Sei $L(x, y(x), y'(x))$ eine in einer Umgebung von $\{(x, y(x), y'(x)) \in \mathbb{R}^3; x \in [a, b]\}$ stetig differenzierbare Funktion. Falls $y(x)$ ein Extremum von $T(y)$ ist, dann

   $$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x))h(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))h'(x) \right) \mathrm{d}x = 0$$

   $\forall\ h \in \mathcal{C}^1([a, b])$ mit $h(a) = h(b) = 0$. y heisst Extremal des Problems.

2. Zeigen Sie danach das folgende Theorem:

   Sei $L(x, y(x), y'(x)) \in \mathcal{C}^1$. $y \in \mathcal{C}([a, b])$ ist genau dann ein Extremal des Problems mit $y(a) = A$ und $y(b) = B$, falls

   $$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \quad \text{stetig differenzierbar ist} \\ &\text{und falls} \quad \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) = 0. \end{aligned}$$

<u>*Hinweis:*</u> Um das Theorem zu zeigen, verwenden Sie das Lemma von Du Bois-Reymond: Sei $d : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\int_a^b d(x)h'(x)\mathrm{d}x = 0$ für alle $h \in \mathcal{C}^1([a, b])$, die $h(a) = h(b) = 0$ erfüllen. Dann ist $d(x)$ konstant.

Aufgabe 4:

Seien α und β die verallgemeinerten Koordinaten des Doppelpendels. In kartesischen Koordinaten sind die kinetische und die potentielle Energie des Doppelpendels gegeben durch

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2), \\ U &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die verallgemeinerten Impulse p_α und p_β des Hamilton-Systems.

Aufgabe 5:

Sei $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\Psi_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Hénon-Abbildung, die durch $\Psi_{a,b}(p, q) = \begin{pmatrix} p \\ 1 + bq + ap^2 \end{pmatrix}$ definiert ist.

Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial(p,q)}\Psi_{a,b}\right)^T J \left(\frac{\partial}{\partial(p,q)}\Psi_{a,b}\right) = J,$$

falls $b = 1$ (d. h. $\Psi_{a,b}$ ist symplektisch).

Abgabe bis 18.04.2010, 14:00

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
`http://www.math.unibas.ch/~cohen`