# Serie 7

zur 16. KW (19.04. - 25.04.2010)

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ genau dann symplektisch ist, wenn $\det A = 1$.

Aufgabe 2:

Eine differenzierbare Abbildung $g : U \to \mathbb{R}^{2d}$ ($U \subset \mathbb{R}^{2d}$ offen) heisst symplektisch, falls die Jacobi-Matrix $g'(p, q)$ überall symplektisch ist, d. h. falls

$$g'(p,q)^T J g'(p,q) = J \quad \text{oder} \quad \omega(g'(p,q)\xi, g'(p,q)\eta) = \omega(\xi, \eta).$$

Sei $M$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $U$, die gegeben ist durch $M = \psi(K)$ mit $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und $\psi(s, t)$ stetig differenzierbar. Wir definieren

$$\Omega(M) := \int\int_K \omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t)\right) \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass wenn $g : U \to \mathbb{R}^{2d}$ symplektisch ist, dann erhält $g$ $\Omega(M)$, d. h.

$$\Omega(g(M)) = \Omega(M).$$

Aufgabe 3:

Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung:

Sei $\psi : U \to V$ ein Diffeomorphismus, $U$, $V \subset \mathbb{R}^{2d}$ offen. Falls $\psi$ symplektisch ist, so wird das Hamilton-System $\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y)$ mit $y = \psi(z)$ transformiert zu

$$\dot{z} = J^{-1}\nabla_z K(z) \quad \text{mit} \quad K(z) = H(y).$$

Aufgabe 4:

Zeigen Sie (nur mit Hilfe der Definition von symplektizität), dass das symplektische Euler-Verfahren symplektisch ist.

*Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass*

$$\begin{pmatrix} I + hH_{qp}^T & 0 \\ -hH_{pp} & I \end{pmatrix} \left(\frac{\partial(p_{n+1}, q_{n+1})}{\partial(p_n, q_n)}\right) = \begin{pmatrix} I & -hH_{qq} \\ 0 & I + hH_{qp} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5:

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Aufgabe 4, dass das Störmer-Verlet Verfahren symplektisch ist.
2. Bezeichne $\Phi_h$ das symplektische Euler-Verfahren. Beweisen Sie, dass dann die Kompositionsmethode $\Psi_h = \Phi_{\alpha_s h} \circ \Phi^*_{\beta_s h} \circ \ldots \circ \Phi^*_{\beta_2 h} \circ \Phi_{\alpha_1 h} \circ \Phi^*_{\beta_1 h}$ symplektisch ist für jede Wahl der $\alpha_i$ und $\beta_i$.

Aufgabe 6:

Zeigen Sie, dass für ein RK-Verfahren die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. Das Verfahren ist symmetrisch für $\dot{y} = Ly$.
2. Das Verfahren ist symplektisch für $\dot{y} = J^{-1}Cy$ mit $C$ symmetrisch.
3. Die Stabilitätsfunktion erfüllt $R(-z)R(z) = 1 \; \forall z \in \mathbb{C}$.
   *Hinweis: Die Stabilitätsfunktion lässt sich schreiben als $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit Polynomen $P$ und $Q$.*

---

**Abgabe bis 26.04.2010, 14:00**

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`