Serie 9

zur 18. KW (03.05. - 09.05.2010)

Aufgabe 1:

Berechnen Sie $a(t)$ und einige $b(t)$ für die Mittelpunktsregel.

Hinweis: Schreiben Sie $\frac{1}{2}(y_0 + y_1)$ *als B-Reihe* $B(\hat{a}, y_0)$ *mit noch zu bestimmenden Koeffizienten* $\hat{a}$. *Wenden Sie ein Theorem aus der Vorlesung an, um* $hf(\frac{y_0+y_1}{2})$ *zu berechnen. Mit Hilfe einer Rekursion finden Sie* $a(t) = \frac{\gamma(t)}{2^{\rho(t)-1}}$.

Aufgabe 2:

Wir betrachten $y' = f(y), y(0) = y_0$ mit einer Invariante $I(y)$. Wir nehmen an, dass das Verfahren $\Phi_h(y)$ diese Invariante erhält. Zeigen Sie, dass die modifizierte Differentialgleichung $I(y)$ ebenfalls erhält.

Hinweis: Zeigen Sie mit einer Induktion, dass $\nabla I(y) f_j(y) = 0$, $j = 1, \ldots, r$. *Sei dazu* $\varphi_{r,t}$ *die Lösung von* $\tilde{y}' = f(\tilde{y}) + hf_2(\tilde{y}) + \ldots + h^{r-1} f_r(\tilde{y})$, $\tilde{y}(0) = y_0$.

Aufgabe 3:

- Zeigen Sie, dass $\mu = \sum_{i=1}^{s} |b_i|$ und $\kappa = ||A|| := \max_{i=1,\ldots,s} \sum_{j=1}^{s} |a_{ij}|$ für RK-Verfahren.
- Berechnen Sie μ und κ für das explizite Euler-Verfahren, das implizite Euler-Verfahren, die Mittelpunktsregel, die Trapezregel und das Gauss-Verfahren.
- Zeigen Sie, dass $\mu = 1$ für ein konsistentes RK-Verfahren mit positiven b_i.

Aufgabe 4: (Siehe Beweis vom Theorem 3)

Zeigen Sie, dass $||\Phi_z(y_0) - y_0|| \leq \varepsilon M(1 + \mu)$ für $\Phi_z(y_0) - y_0 = zf(y_0) + z^2 d_2(y_0) + z^3 d_3(y) + \ldots$.

Aufgabe 5: (*Programmieraufgabe*)

- Beweisen Sie, dass für ein nicht-symplektisches Verfahren der Ordnung r gilt:

$$H(y_n) - H(y_0) = \mathcal{O}(th^r) \quad \text{mit} \quad t = nh.$$

  Hinweis: Verwenden Sie, dass der lokale Fehler $\mathcal{O}(h^{r+1})$ *ist.*

- Plotten Sie den Fehler in H für ein Pendel, d. h. $H(p, q) = \frac{p^2}{2} - \cos(q)$, indem Sie die Gleichung einmal mit dem expliziten Euler-Verfahren und einmal mit dem symplektischen Euler-Verfahren lösen ($h = 0.005$, $[0, T] = [0, 50]$, $(p_0, q_0) = (2.5, 0)$).

Aufgabe 6: (*Programmieraufgabe*)

Veranschaulichung der Flächenerhaltung. Wir betrachten erneut das Pendel mit der Hamilton-Funktion $H(p,q) = \frac{p^2}{2} - \cos(q)$. Plotten Sie die Niveaulinien, d. h. $H(p,q) = const.$ und berechnen Sie mit dem symplektischen Euler-Verfahren, dem expliziten Euler-Verfahren und dem impliziten Euler-Verfahren die Position einer bestimmten Fläche nach einer Zeit t.

```
p = -3:0.01:3;
q = -2:0.01:10;
[Q,P] = meshgrid(q,p);
H = ...;

% Anfangswerte

q10 = [-1:0.01:1 0.99:-0.01:0.5 0.49:-0.01:-0.49 -0.5:-0.01:-1];
p10 = 1+[(-1:0.01:1).^2 0.995:-0.005:0.75 cos(0.49:-0.01:-0.49)-0.13
    0.75:0.005:1];

q20 = 2*pi+3/4*q10;
p20 = 3/4*p10;

figure()
hold on
contour(...)  % Plot der Niveaulinien
plot(q,q*0,'k',0,p,'k')
plot(...) % Plot der beiden Anfangsflaechen
xlabel('q');
ylabel('p','rotation',0);
title('Symplektisches Euler');

h = pi/4;
t = 0:h:2*pi;
N = length(t);
p1(1,:) = p10;
q1(1,:) = q10;
p2(1,:) = p20;
q2(1,:) = q20;

for n = 1:N-1
    ...         % Symplektisches Euler
end

i = find(t==pi/2);
j = find(t==pi);
k = find(t==3*pi/2);
```

```
plot(...) % Plot der Flaeche nach Zeit t=pi/2, t=pi, t=3*pi/2
hold off
```

Abgabe bis 10.05.2010, 14:00

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`